Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

68. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 13. AUGUST 1957)

QA1
M88
v.68-69

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1957

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

68. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Ribenboim, P., Le théorème d'approximation pour les valuations de Krull . . . 1
Parameswaran, M. R., Some product theorems in summability 19
Stallmann, F., Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. II 27
Stöhr, A., Über die Anzahl der Wege in einem gewissen Straßennetz 61
Atkinson, F. V., Estimation of an Eigen-Value Occurring in a Stability Problem . 82
Mikolás, M., Über gewisse Lambertsche Reihen, I: Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\tau)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel 100

RIBENBOIM, P.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 1—18 (1957)

Le théorème d'approximation pour les valuations de KRULL

Par

P. RIBENBOIM *)

Le présent travail est dédié à la théorie des valuations de KRULL, c'est-à-dire, les valuations généralisées qu'il a introduit en 1932 dans son mémoire „Allgemeine Bewertungstheorie". KRULL a obtenu les premiers résultats intéressants sur ces valuations et ses applications à la théorie des corps ordonnés et des anneaux intégralement clos. Depuis, les méthodes de cette théorie ont été appliquées à l'étude des groupes abéliens totalement ordonnés par différents auteurs. Une analyse de ces questions nous a permis de remarquer que toute théorie de corps valués au sens de KRULL qui soit arithmétiquement complète doit prendre en considération au même temps que la valuation donnée, toutes les valuations moins fines ainsi que les valuations qu'elle determine sur leurs corps des restes; ce n'est que de cette façon que tous les idéaux premiers (et non seulement l'idéal maximal) interviennent. D'ailleurs, une telle prise de position est parfaitement naturelle et justifiée. De ce point de vue, il est possible d'étendre les résultats déjà obtenus par KRULL aux valuations associées à la valuation donnée. Parmi les résultats qui se laissent généraliser, il y a le théorème d'approximation. Dans ce travail nous obtenons essentiellement le théorème d'approximation pour des ensembles finis de valuations (non nécessairement deux à deux indépendantes). Ultérieurement nous espérons publier d'autres résultats sur la théorie des valuations de KRULL, et en particulier nous examinerons la notion de corps complet et maximal pour une valuation de KRULL, ainsi que la théorie du prolongement des valuations de KRULL à une extension algébrique finie, en abordant les questions d'inértie, ramification et décomposition.

Pour faciliter la lecture, nous rappelons au paragraphe 1 les théorèmes de composition et décomposition de valuations, lesquels sont essentiels dans tout cet article.

Au paragraphe 2 nous considérons un corps K, muni d'un nombre fini de valuations, sur lesquelles nous ne faisons aucune hypothèse restrictive; en particulier, elles peuvent avoir rang arbitraire et ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes. Le résultat principal est le théorème d'approximation (au voisinage de 0). Pour ces considérations, la notion de «arbre» engendré par un ensemble fini de valuations joue un rôle capital. L'arbre en question se définit comme étant l'ensemble ordonné par la relation «moins fine» formé des valuations qui sont bornes inférieures de valuations de

*) Boursier du Conselho Nacional de Pesquizas, Rio de Janeiro, Brasil.

l'ensemble donné (cette terminologie s'accorde avec de BIRKHOFF, usuelle dans la théorie des réticulés, car pour toute valuation w d'un corps K l'ensemble des valuations de K moins fines que w est totalement ordonné selon la relation «moins fine»). A chaque arbre nous associons sa longueur, définie comme étant le maximum des longueurs des «chaînes» de l'arbre, et ensuite nous établissons une technique de démonstration par induction sur la longueur des arbres. En particulier, si les valuations données sont deux à deux indépendantes, l'arbre engendré possède longueur 2. C'est avec cette technique que nous pouvons démontrer le théorème d'approximation (au voisinage de 0): donnés les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K et les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ appartenant respectivement aux groupes des valeurs des valuations données, alors il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ si et seulement si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est «compatible» (dans un sens naturel à être précisé).

Au paragraphe 3 nous généralisons le théorème précedent dans le sens suivant: données les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K, des éléments $b_1, \ldots, b_r$ de K et un élément $a \in K$, non nul, le théorème determine des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un élément $x \in K$ tel que, relativement aux valuations données, x soit aussi «proche» des éléments $b_1, \ldots, b_r$, que a l'est de l'élément 0. La démonstration de ce théorème exige une préparation plus délicate, avant l'emploi de la technique de démonstration par induction sur la longueur de l'arbre engendré par les valuations données.

Ayant obtenu ces résultats fondamentaux, nous pouvons démontrer le théorème 6, qui décrit l'arithmétique d'un anneau intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuation. Enfin, de lemme 11 montre l'existence de solution de tout système fini de congruences deux à deux compatibles, même lorsque les valuations données ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes. Le théorème 6 et le lemme 11 généralisent les résultats correspondants indiqués par KRULL dans son mémoire déjà cité, et se démontrent à partir du théorème d'approximation sous forme générale.

L'auteur exprime ses remerciements au Professeur KRULL, par les fructueuses discussions échangées pendant l'élaboration de ce travail.

1. Pour une valuation w d'un corps K, nous noterons en général par A son anneau de valuation, $\mathfrak{p}^0$ l'idéal maximal de A, Γ son groupe des valeurs, $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$ son corps des restes, E le groupe multiplicatif des unités de A. De même, on emploiera des notations analogues pour une valuation w'.

Lemme 1. Si A est un anneau de valuation du corps K, si $\mathfrak{p}_1 \subseteqq \mathfrak{p} \subset A$, où $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}$, sont des idéaux premiers, alors*):

1) $\mathfrak{p}_1 = A_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}_1$ est un idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$ (en particulier, $\mathfrak{p} = A_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$, donc $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ est un corps).

2) $A_{\mathfrak{p}_1} = (A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}_1}$.

3) $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_1 \cong (A/\mathfrak{p}_1)_{(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1)}$.

*) $A_{\mathfrak{p}}$ désigne l'anneau de fractions de A défini par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, et égal à l'ensemble des éléments du type x/y, avec $x, y \in A$, $y \notin \mathfrak{p}$.

Lemme 2. Si w est une valuation du corps K, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau A et l'ensemble des sous-groupes isolés Δ de Γ; cette correspondance est telle que $\mathfrak{p}$ et Δ se correspondent si et seulement si Δ est le sous-groupe de Γ engendré par les $w(x)$ lorsque $x \in A$, $x \notin \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \{x \in A \mid w(x) \notin \Delta\}$. En particulier, l'idéal premier nul correspond au sous-groupe isolé Γ, l'idéal premier maximal $\mathfrak{p}^0$ correspond au sous-groupe isolé (0).

Définition. Soient w, w' des valuations du corps K, ayant anneaux de valuations respectivement A, A'. On dit que w est moins fine que w' et on écrit $w \leq w'$ lorsque $A \supseteq A'$. On dit que w et w' sont équivalentes lorsque $A = A'$ et on écrit $w \equiv w'$.

Désormais nous identifierons deux valuations équivalentes et quand nous écrirons $w \neq w'$ cela voudra dire (sauf mention expresse du contraire) que $A \neq A'$.

Pour tout corps K, la relation $\leq$ est un ordre sur l'ensemble des valuations de K, dont le premier élément est la valuation triviale. Les valuations de rang 1, c.a.d. ayant groupe de valeurs archimédien, sont exactement les éléments minimaux, selon $\leq$, de l'ensemble des valuations non triviales du corps K.

Théorème 1. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau A d'une valuation w de K et l'ensemble des valuations $w_\mathfrak{p}$ de K, moins fines que w. Plus précisement:

1) donné $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ est l'anneau d'une valuation $w_\mathfrak{p}$ de K, $w_\mathfrak{p} \leq w$; le groupe de valeurs de $w_\mathfrak{p}$ est Γ/Δ, où Δ correspond biunivoquement à $\mathfrak{p}$ (lemme 2); les idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ sont exactement les idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de $A_\mathfrak{p}$; le corps des restes de K défini par $w_\mathfrak{p}$ est $\mathscr{K} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$; enfin, on a la formule $w_\mathfrak{p} = \theta_\mathfrak{p} \circ w$ où $\theta_\mathfrak{p}$ est l'homomorphisme canonique de Γ sur Γ/Δ.

2) toute valuation w' de K, $w' \leq w$, est du type $w_\mathfrak{p}$, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ (éventuellement nul) de l'anneau A.

3) la correspondance ci-dessus est biunivoque.

Corollaire 1. Si A est l'anneau d'une valuation du corps K, tout sous-anneau de K contenant A est un anneau de valuation et nécessairement du type $A_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A.

Corollaire 2. L'ensemble des valuations moins fines qu'une valuation donnée est totalement ordonné.

Corollaire 3. Données les valuations w, w' d'un corps K ayant anneaux resp. A, A', alors $A \cdot A'$ est l'anneau d'une valuation w'' de K qui est la borne inférieure de w, w' relativement à l'ordre $\leq$ (on écrit $w'' = w \wedge w'$); en outre, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ (éventuellement nul, lorsque w'' est la valuation triviale) commun aux anneaux A, A', tel que $A \cdot A' = A_\mathfrak{p} = A'_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est le plus grand idéal premier commun à A, A'.

Remarquons que ce corollaire est encore valable pour un nombre fini de valuations.

Théorème 2. Soit w une valuation du corps K. Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, sont des idéaux premiers de A, $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}'$, alors l'anneau $A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}$ définit une valuation $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ du corps $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, dont le groupe des valeurs est Δ/Δ' (où $\Delta \leftrightarrow \mathfrak{p}$, $\Delta' \leftrightarrow \mathfrak{p}'$), l'idéal maximal est $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$, le corps des restes est $\mathscr{K}' = A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}' \cong (A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p})/(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p})$; on a la formule $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} \circ \varphi_{\mathfrak{p}} = \theta_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} \circ w$, valable sur l'ensemble complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans $A_{\mathfrak{p}}$, où $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est l'homomorphisme canonique de $A_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ et $\theta_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est l'homomorphisme canonique de Δ sur Δ/Δ'.

Cas particuliers:

(i) si $\mathfrak{p} = (0)$ on obtient les valuations de K moins fines que w; en particulier, $w_{(0),\mathfrak{p}^0} = w$ et $w_{(0),(0)}$ est la valuation triviale de K.

(ii) si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est la valuation triviale de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$.

(iii) si $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}^0$ (idéal maximal de A) alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}^0}$ est une valuation de $\mathscr{K}$ ayant corps des restes $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$.

(iv) si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, sont des idéaux premiers successifs, alors $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'}$ est une valuation de rang 1 de $\mathscr{K}$.

Corollaire. Soit w une valuation du corps K, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, des idéaux premiers de l'anneau de valuation A de w, $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}'$, et $w_{\mathfrak{p},\mathfrak{p}'} = v$ la valuation de $\mathscr{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ définie ci-dessus, donc ayant idéal maximal égal à $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, sont des idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \mathfrak{p}'$, si $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}$, alors $v_{\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2} = w_{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$.

Le théorème suivant est connu sous le nom de *théorème des valuations composées*:

Théorème 3. Soit w une valuation du corps K. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des valuations w' de K plus fines que w et l'ensemble des valuations v' du corps des restes $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$ de K selon w. Plus précisement:

1) donné w', valuation de K, ayant anneau A', $w' \geq w$, l'anneau $A'/\mathfrak{p}^0$ du corps $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$ définit une valuation v', dont le groupe des valeurs est égal à Γ' (groupe de la valuation w'), l'idéal maximal de l'anneau de v' est $\mathfrak{p}'^0/\mathfrak{p}^0$ et le corps des restes est $A'/\mathfrak{p}'^0 = \mathscr{K}'^0$; enfin, on a la formule $w' = v' \circ \varphi$ valable sur E, où φ est l'homomorphisme canonique de A sur $\mathscr{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$.

2) on obtient de la façon ci-dessus toutes les valuations de $\mathscr{K}^0$, c.a.d., si v' est une valuation de $\mathscr{K}^0$, ayant anneau de valuation a', alors $\varphi^{-1}(a') = A'$ est l'anneau d'une valuation w' de K, $w' \geq w$, et on a la formule $w' = v' \circ \varphi$, valable sur E.

3) la correspondance ci-dessus est biunivoque.

2. Soit K un corps et $w_1, w_2, \ldots, w_r$ un nombre fini de valuations de K. Nous allons étudier dans ce numéro les rapports de position entre ces valuations, en établissant, ensuite le théorème d'approximation, au voisinage de 0.

Nous commençons en faisant l'hypothèse que ces valuations soient deux à deux incomparables par la relation $\leq$, c.a.d., si $i \neq j$ alors on n'a jamais $A_i \subseteq A_j$. Si l'ensemble des valuations données ne jouissait pas de cette propriété, alors on se restreindrait au sous-ensemble formé des valuations maximales par la relation $\leq$.

Rappelons quelques résultats simples qui peuvent d'ailleurs être trouvés à l'article de KRULL [3].

Lemme 3. Si w, w' sont deux valuations d'un corps K, incomparables selon $\leq$, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A de la valuation w, contenu dans l'anneau A' de la valuation w', alors $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A' et on a $A_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}}$.

Définition. Données les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K, l'ensemble fini (ordonné par $\leq$) $\mathfrak{U}$ de toutes les valuations (ou des respectifs anneaux de valuation) du type $w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \cdots \wedge w_{i_t}$ (où $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leq r$) s'appelle *l'arbre* engendré par l'ensemble $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$.

En vertu du corollaire 2 au théorème 1, l'arbre $\mathfrak{U}$ est un ensemble ordonné de valuations de K tel que pour tout $w \in \mathfrak{U}$ l'ensemble des $w' \in \mathfrak{U}$ telles que $w' \leq w$ est totalement ordonné (selon $\leq$). Les valuations $w_1, \ldots, w_r$ sont exactement les éléments maximaux de $\mathfrak{U}$ (selon $\leq$). L'arbre $\mathfrak{U}$ possède aussi un premier élément qui est la valuation engendrée par les valuations données, c.a.d., ayant anneau égal à $A_1 \cdot A_2 \ldots A_r$, et qui peut être éventuellement égale à la valuation triviale de K.

Donné l'arbre $\mathfrak{U}$, engendré par l'ensemble $\{w_1, \ldots, w_r\}$, considérons toutes ses *chaînes*, c'est-à-dire les sous-ensembles de $\mathfrak{U}$ qui sont totalement ordonnés selon $\leq$; appelons longueur d'une chaîne le nombre d'éléments de la chaîne. Alors, la *longueur de l'arbre* $\mathfrak{U}$ se définit comme étant le maximum des longueurs des chaînes contenues dans l'arbre $\mathfrak{U}$. C'est évidemment un entier fini (au plus égal à r), toujours strictement plus grand que 1, sauf lorsqu'on considère le cas trivial de l'arbre engendré par une seule valuation.

Ces notions nous serons utiles peu après, pour la démonstration du théorème d'approximation.

Nous allons maintenant associer à chaque valuation w_{i_0} de l'ensemble fini $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ de valuations de K (avec l'hypothèse indiquée) une suite décroissante finie d'idéaux premiers de l'anneau A_{i_0} de la valuation w_{i_0}, laquelle s'appellera la *suite de position* (ou suite caractéristique) de w_{i_0} relativement à l'ensemble donné $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Pour cela, considérons le sous-ensemble (qui est totalement ordonné) de l'arbre $\mathfrak{U}$ (engendré par $\{w_1, \ldots, w_r\}$) formé par toutes les valuations moins fines que w_{i_0}. Par le théorème 1, cet ensemble permet de définir un nombre fini d'idéaux premiers de l'anneau A_{i_0}, dont la suite décroissante $\mathfrak{p}^{(0)} \supset \mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{p}^{(2)} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}^{(s)}$ s'appelle la suite de position de w_{i_0} relativement à l'ensemble $\{w_1, \ldots, w_r\}$. Remarquons que $\mathfrak{p}^{(0)}$ est égal à l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$ de l'anneau A_{i_0} et de même $\mathfrak{p}^{(s)}$ peut être ou non égal à l'idéal nul (on a $\mathfrak{p}^{(s)} = (0)$ exactement lorsque $A_1 \cdot A_2 \ldots A_r = K$).

Les idéaux premiers qui constituent la suite de position de w_{i_0} ont la propriété caractéristique suivante:

Lemme 4. Avec les notations ci-dessus, on a: si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A_{i_0} contenant strictement $\mathfrak{p}^{(j)}$, il existe au moins un anneau de valuation A_i de l'ensemble donné, tel que $\mathfrak{p}^{(j)} \subseteq A_i$ et que $\mathfrak{p}$ ne soit pas contenu dans A_i; en particulier, $\mathfrak{p}^{(s)}$ est le plus grand idéal premier de A_{i_0} contenu

dans tous les anneaux A_i, tandis que $\mathfrak{p}^{(1)}$ est contenu dans au moins un des anneaux A_i $(i \neq i_0)$ et tout idéal premier contenant strictement $\mathfrak{p}^{(1)}$ n'est contenu que dans A_{i_0}.

Démonstration. Le lemme résulte aussitôt de la définition de la suite de position et du corollaire 3 au théorème 1, étendu à un nombre fini de valuations.

La suite de position pourrait être aussi définie de la façon suivante [3]. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau A_{i_0}, soit l'ensemble $E(\mathfrak{p}) = \{A_i \mid \mathfrak{p} \subsetneqq A_i\} \subseteq \{A_1, \ldots, A_r\}$; posons $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}'$ lorsque $E(\mathfrak{p}) = E(\mathfrak{p}')$. Il est alors clair que chaque classe d'équivalence possède un plus grand élément, égal à la réunion de tous les idéaux premiers de la classe en question. L'ensemble des valuations données étant fini, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence, dont leurs plus grand idéaux déterminent la suite de position de w_{i_0} relativement à $\{w_1, \ldots, w_r\}$, en vertu du lemme précedent.

Définition. Deux valuations w, w' d'un corps K sont dites indépendantes lorsque $w \wedge w'$ est la valuation triviale de K, c'est-à-dire lorsque $A \cdot A' = K$ (où A, A' désignent respectivement les anneaux de valuation de w, w').

Le résultat suivant a été démontré par KRULL [3] et est connu sous le nom de *théorème d'approximation pour des valuations indépendantes*:

Théorème 4. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes des valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données. Alors il existe $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

JAFFARD [4] a indiqué le résultat plus fort suivant, qui se trouve déjà dans des notes encore non publiées de BOURBAKI [2]:

Théorème 4'. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement à leurs groupes de valeurs, et soient $b_1, \ldots, b_r$ des éléments quelconques de K. Alors il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x - b_i) = \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$.

Comme conséquence du théorème 4, nous voulons citer quelques résultats sur l'arithmétique des anneaux du type $A = A_1 \cap \cdots \cap A_r$, où $A_1, \ldots, A_r$ sont les anneaux des valuations deux à deux indépendantes $w_1, \ldots, w_r$ d'un corps K (voir KRULL [3]).

Lemme 5. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K, $A_1, \ldots, A_r$ leurs respectifs anneaux de valuation, et $A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$. Pour tout indice i $(i = 1, \ldots, r)$ soit $\mathfrak{a}_i \subsetneqq A_i$ un idéal de l'anneau A_i, $\mathfrak{a}_i \neq (0)$, et soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$ (idéal de l'anneau A); alors, pour tout indice i on a $\mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$. Réciproquement, soit $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de l'anneau A et pour tout indice $i = 1, \ldots, r$ soit $\mathfrak{a}_i = A_i \mathfrak{a}$; alors on a $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} a_i$.

Lemme 6. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations deux à deux indépendantes d'un corps K, et $\mathscr{K}_1^0, \ldots, \mathscr{K}_r^0$, leurs respectifs corps des restes. Alors, si

$b_1 \in \mathfrak{K}_1^0, \ldots, b_r \in \mathfrak{K}_r^0$, sont des éléments donnés arbitrairement, il existe un élément $a \in A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (intersection des anneaux A_i des valuations w_i), dont la classe résidue selon la valuation w_i est égale à b_i (pour tout indice i).

Nous allons généraliser le théorème et les lemmes ci-dessus pour le cas où les valuations données ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes. Des généralisations partielles ont été obtenues aussi par NAGATA [5], en employant un procédé distinct.

Remarquons que la donnée de deux valuations w_i, w_j d'un corps K, ayant anneaux égaux à A_i, A_j et groupes de valeurs égaux à Γ_i, Γ_j, determine un idéal premier $\mathfrak{p}$ qui est le plus grand idéal premier commun à A_i et A_j; alors l'anneau $A_i \cdot A_j$ de la valuation $w_i \wedge w_j$ s'écrit $A_i \cdot A_j = (A_i)_\mathfrak{p} = (A_j)_\mathfrak{p}$; à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ correspondent respectivement dans les groupes Γ_i et Γ_j les sous-groupes isolés $\Delta_{ij} \subseteq \Gamma_i$, $\Delta_{ji} \subseteq \Gamma_j$, et on a $\Gamma_i/\Delta_{ij} \cong \Gamma_j/\Delta_{ji}$, celui-ci étant le groupe des valeurs de la valuation $w_i \wedge w_j$. Si $\theta_{ij}\colon \Gamma_i \to \Gamma_i/\Delta_{ij}$, $\theta_{ji}\colon \Gamma_j \to \Gamma_j/\Delta_{ji}$ désignent les homomorphismes canoniques de passage au quotient, alors nous conviendrons que si $\alpha_i \in \Gamma_i$, $\alpha_j \in \Gamma_j$, on écrira $\bar{\alpha}_i \leq \bar{\alpha}_j$ (ou $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$) pour exprimer que $\theta_{ij}(\alpha_i) \leq \theta_{ji}(\alpha_j)$ (ou $\theta_{ij}(\alpha_i) = \theta_{ji}(\alpha_j)$). Des notations analogues seront utilisées dans des cas semblables.

Définition. Données les valuations $w_1, \ldots, w_r$ du corps K et les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, appartenant respectivement aux groupes des valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, on dit que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est *compatible* lorsque pour tout couple d'indices distincts $i \neq j$, on a $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$.

De cette définition il résulte que si les valuations $w_1, \ldots, w_r$ sont deux à deux indépendantes, alors tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible.

Nous pouvons maintenant enoncer la *forme générale du théorème d'approximation* (au voisinage de 0):

Théorème 5. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes de valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données. Pour qu'il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, il faut et il suffit que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ soit compatible.

Démonstration. La condition étant évidemment nécessaire, il suffit de démontrer sa suffisance. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que les valuations données sont deux à deux incomparables selon la relation $\leq$, sinon on remplacerait l'ensemble donné par le sous-ensemble des valuations maximales selon $\leq$, et le théorème étant vrai pour ce sous-ensemble, il le serait aussi pour l'ensemble donné, en vertu de la compatibilité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Soit $\mathfrak{U}$ l'arbre engendré par les valuations données $w_1, \ldots, w_r$ et l la longueur de $\mathfrak{U}$. La démonstration sera faite par induction sur l. Le cas où $l = 1$ est trivial, car alors nécessairement $r = 1$. Le cas où $l = 2$ ne se laisse par réduire au précedent et ainsi il doit être traité en détail.

Soit donc $l = 2$; alors, pour des indices distincts quelconques i, j, $A_i \cdot A_j = B$ est l'anneau d'une valuation v de K. Si v est la valuation triviale de K, alors les valuations données $w_1, \ldots, w_r$ sont deux à deux indépendantes et d'après

le théorème 4, il existe $x \in K$ tel que $w_i(x) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Par contre, si $B \neq K$, soit $\mathfrak{p}$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux $A_1, \ldots, A_r$ (donc $\mathfrak{p} \neq (0)$) et pour tout indice i soit Δ_i le sous-groupe isolé de Γ_i qui correspond à $\mathfrak{p}$, donc $\Gamma_i/\Delta_i \cong \Gamma_j/\Delta_j$ est le groupe de valeurs de la valuation v. Puisque $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible, alors $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$ (pour des indices i, j quelconques) et ainsi les α_i définissent par passage au quotient modulo Δ_i un élément β du groupe des valeurs de v. Soit $y \in K$ tel que $v(y) = \beta$, donc $w_i(y) - \alpha_i = \alpha_i' \in \Delta_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Soit maintenant dans le corps $B/\mathfrak{p} = \mathscr{K}$, les valuations w_i' ayant anneaux respectivement égaux à $A_i/\mathfrak{p}$, et dont les groupes des valeurs sont Δ_i. L'arbre $\mathfrak{U}$ ayant longueur 2, les valuations $w_1', \ldots, w_r'$ de $\mathscr{K}$ sont deux à deux indépendantes et par le théorème 4 il existe $z' \in \mathscr{K}$ tel que $w_i'(z') = \alpha_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$ et alors par le théorème 3, on a $w_i(z) = w_i'(z') = \alpha_i'$, où $z \in B$ est un répresentant de la classe modulo $\mathfrak{p}$ définie par z'. Alors, si $x = y/z$ on a $w_i(x) = (\alpha_i + \alpha_i') - \alpha_i' = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Supposons maintenant le théorème vrai lorsque la longueur de l'arbre $\mathfrak{U}$ est strictement inférieure à l (où $l > 2$).

Soit u la valuation de K égale à la borne inférieure des valuations données, $u = w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$, donc u est l'élément minimal de l'arbre $\mathfrak{U}$; notons C l'anneau de la valuation u de K. De même, notons $v_1, \ldots, v_s$ les valuations de K qui sont minimales dans l'arbre $\mathfrak{U}$, parmi celles distinctes de u, appartenant à l'arbre $\mathfrak{U}$ (donc $s \geq 2$) et soient respectivement $B_1, \ldots, B_s$ leurs anneaux de valuation. Ensuite, numérotons les valuations données $w_1, w_2, \ldots, w_r$, de façon que pour tout indice i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{ir_i}$ soient exactement les valuations plus fines que v_i; notons $A_{ij}, \mathfrak{p}_{ij}^0, \Gamma_{ij}$, respectivement l'anneau, l'idéal maximal et le groupe des valeurs de la valuation w_{ij} (pour i, j quelconques) et de même, soit $\alpha_{ij} \in \Gamma_{ij}$ l'élément donné du groupe des valeurs de w_{ij}. Pour tout indice i, soit $\mathfrak{p}_i$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux de valuation $A_{i1}, \ldots, A_{ir_i}$, et dans chaque groupe Γ_{ij} soit Δ_{ij} le sous-groupe isolé correspondant à $\mathfrak{p}_i$ (attention au changement de notation!); alors, pour tout indice i on a $B_i = A_{i1} \cdot A_{i2} \ldots A_{ir_i} = (A_{ij})_{\mathfrak{p}_i}$ (j quelconque), $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal maximal de B_i et le groupe Ξ_i des valeurs de la valuation v_i s'écrit $\Xi_i = \Gamma_{ij}/\Delta_{ij}$ (j quelconque). De même, si $\mathfrak{q}$ désigne le plus grand idéal premier commun aux anneaux A_{ij} $(i, j$ quelconques), alors pour tout indice i on a $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_i$ et $C = (B_i)_{\mathfrak{q}} = (A_{ij})_{\mathfrak{q}}$ $(i, j$ quelconques), $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal de C, et si Λ_{ij} est le sous-groupe isolé de Γ_{ij} qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{q}$, alors le groupe des valeurs Θ de u s'écrit $\Theta = \Gamma_{ij}/\Lambda_{ij}$ $(i, j$ quelconques).

En vertu de l'hypothèse, pour tout indice i $(i = 1, \ldots, s)$ on a $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ik}$ $(j, k$ quelconques) et ainsi on définit un élément $\beta_i \in \Xi_i$. Or, les valuations $v_1, \ldots, v_s$ de K engendrent un arbre $\mathfrak{B}$ de K ayant longueur 2 et ainsi, puisque $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$ est compatible, alors il existe $y \in K$ tel que $v_i(y) = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, s)$; il en résulte que $w_{ij}(y) - \alpha_{ij} = \alpha_{ij}'' \in \Delta_{ij}$ quelques soient les indices i, j.

Soit maintenant pour tout indice i $(i = 1, \ldots, s)$ le corps $\mathscr{K}_i = B_i/\mathfrak{p}_i$ et dans $\mathscr{K}_i$ considérons les valuations w_{ij}'' ayant anneaux de valuation respectivement

égaux à $A_{ij}/\mathfrak{p}_i$, idéal maximal $\mathfrak{p}_{ij}^0/\mathfrak{p}_i$ et groupe des valeurs Δ_{ij} (j quelconque). L'arbre $\mathfrak{U}_i''$ engendré par les valuations w_{ij}'' du corps $\mathscr{K}_i$ possède une longueur strictement inférieure à la longueur l de l'arbre $\mathfrak{U}$; d'autre part, $(\alpha_{i1}'', \alpha_{i2}'', \ldots, \alpha_{ir_i}'') \in \Delta_{i1} \times \cdots \times \Delta_{ir_i}$ est compatible. Ainsi, par l'hypothèse de l'induction, il existe $z_i'' \in \mathscr{K}_i$ tel que $w_{ij}''(z_i'') = \alpha_{ij}''$ (pour $j = 1, \ldots, r_i$).

Or, dans le corps $\mathscr{K} = C/\mathfrak{q}$, considérons les valuations $v_1', \ldots, v_s'$, ayant anneaux de valuation respectivement égaux à $B_i/\mathfrak{q}$, idéal maximal $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}$, corps des restes $(B_i/\mathfrak{q})/(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}) \cong B/\mathfrak{p}_i = \mathscr{K}_i$ (pour $i = 1, 2, \ldots, s$). Les valuations $v_1', \ldots, v_s'$ de $\mathscr{K}$ étant deux à deux indépendantes, alors donnés lesél éments $z_1'' \in \mathscr{K}_1, \ldots, z_s'' \in \mathscr{K}_s$ appartenant respectivement à ses corps des restes, en vertu du lemme 6, il existe un élément $z' \in \bigcap_{i=1}^{s} B_i/\mathfrak{q} \subseteq C/\mathfrak{q} = \mathscr{K}$ tel que pour tout indice i la classe de z' modulo $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{q}$ soit égale à $z_i'' \in \mathscr{K}_i$. Soit $z \in C \subseteq K$ un élément tel que la classe de z modulo $\mathfrak{q}$ soit z'. Alors, en vertu du théorème 3, on déduit que si w_{ij}' désigne la valuation ayant anneau $A_{ij}/\mathfrak{q}$, alors $w_{ij}(z) = w_{ij}'(z') = w_{ij}''(z_i'') = \alpha_{ij}''$, quelques soient les indices i, j. Il résulte que si $x = y/z$ alors $w_{ij}(x) = (\alpha_{ij} + \alpha_{ij}'') - \alpha_{ij}'' = \alpha_{ij}$, quelques soient les indices i, j.

3. En ce numéro nous chercherons à obtenir une généralisation du théorème 5 qui redonne au cas des valuations deux à deux indépendantes le théorème 4'. Nous l'obtiendrons d'une manière directe et sans supposer vrai le théorème 5, lequel sera alors une simple conséquence. Pour cela, nous établirons d'abord quatre lemmes.

Lemme 7. Soient w, w' deux valuations d'un corps K, et α, α' des éléments appartenant respectivement aux groupes Γ, Γ', des valuations données. Pour qu'il existe $x \in K$ tel que $w(x) \geq \alpha$, $w'(x) \leq \alpha'$, il faut et il suffit que $\bar{\alpha}' \geq \bar{\alpha}$.

Démonstration. Il est clair que si $x \in K$, $w(x) \geq \alpha$, $w'(x) \leq \alpha'$, et si $w_0 = w \wedge w'$ alors $\bar{\alpha}' \geq \overline{w'(x)} = w_0(x) = \overline{w(x)} \geq \alpha$. Réciproquement, soit $\bar{\alpha}' \geq \bar{\alpha}$ et prenons des éléments $a, a' \in K$ tels que $w(a) = \alpha$, $w'(a') = \alpha'$, donc $w_0(a) = \overline{w(a)} = \bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}' = \overline{w'(a')} = w_0(a')$ et alors $a'/a \in A \cdot A'$ (anneau de la valuation $w_0 = w \wedge w'$) donc $a'/a = bb'$, où $b \in A$, $b' \in A'$. Prenons $x = ab$, alors $a' = x \cdot b'$ et $w(x) \geq w(a) = \alpha$, $w'(x) \leq w'(a') = \alpha'$.

Lemme 8. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leq$) d'un corps K, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, des éléments appartenant respectivement aux groupes des valeurs $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$, des valuations données. Si pour tout indice $i \neq 1$ on a $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_i = \bar{0}$ (c'est-à-dire $\alpha_1 \in \Delta_{1i}$, $\alpha_i \in \Delta_{i1}$, pour tout indice $i \neq 1$, où Δ_{1i}, Δ_{i1}, sont respectivement les sous-groupes isolés de Γ_1, Γ_i, correspondants au plus grand idéal premier commun à A_1, A_i) alors il existe $x \in K$ tel que $w_1(x) \leq \alpha_1$ et $w_i(x) \geq \alpha_i$ (pour $i = 2, 3, \ldots, r$).

Démonstration. Le lemme est vrai lorsque $r = 2$, car alors il se réduit au lemme précedent. Supposons par induction qu'il soit vrai pour $r - 1$ valuations. Remarquons qu'il est possible de supposer sans perte de généralité que $\alpha_1 < 0$ et que $\alpha_i > 0$ pour tout indice $i \neq 1$; en effet, il suffit de

remplacer α_1 par $\alpha_1' \in \bigcap_{i \neq 1} \Delta_{1i}$, $\alpha_1' < 0$ et α_i par $\alpha_i' = \alpha_i + \delta_i > 0$, où $\delta_i \in \Delta_{i1}$ et le nouveau système $(\alpha_1', \ldots, \alpha_r')$ satisfait encore $\bar{\alpha}_1' = \bar{\alpha}_i' = \bar{0}$.

Alors, par induction, il existe un élément $a \in K$ tel que $w_1(a) \leqq \alpha_1$ et $w_i(a) \geqq \alpha_i$ $(i = 2, 3, \ldots, r-1)$; de même, il existe un élément $b \in K$ tel que $w_1(b) \leqq \alpha_1$ et $w_i(b) \geqq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1, r)$. Il existe alors quatre possibilités quant aux valeurs $w_r(a), w_2(b)$.

(i) $w_r(a) \geqq 0$, $w_2(b) \geqq 0$. Alors soit $x = a \cdot b$; on vérifie que $w_1(x) \leqq \alpha_1 + \alpha_1 < \alpha_1$, $w_2(x) \geqq w_2(a) \geqq \alpha_2$, $w_i(x) \geqq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1)$, $w_r(x) \geqq w_r(b) \geqq \alpha_r$.

(ii) $w_r(a) < 0$, $w_2(b) \geqq 0$. Alors soit $x = a' \cdot b$, où $a' = a/(a+1)$; on vérifie que $w_1(x) = w_1(b) \leqq \alpha_1$ car $w_1(a) = w_1(a+1)$, $w_2(x) = w_2(a) + w_2(b) \geqq \alpha_2$, car $w_2(a+1) = 0$, $w_i(x) \geqq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1)$, $w_r(x) = w_r(b) \geqq \alpha_r$, car $w_r(a) = w_r(a+1)$.

(iii) $w_r(a) \geqq 0$, $w_2(b) < 0$. Ce cas est analogue au précedent, avec $x = a \cdot b'$, $b' = b/(b+1)$.

(iv) $w_r(a) < 0$, $w_2(b) < 0$. Si on a $w_1(a) = w_1(b)$ on remplace a par a^2 et ainsi on peut supposer que $w_1(a) < w_1(b)$, car a^2 vérifie les mêmes inégalités que a. Soit $x = a \cdot b \cdot c$, où $c = 1/(a+b+1)$; alors $w_1(x) = w_1(b) \leqq \alpha_1$ car $w_1(a) = w_1(a+b+1)$, $w_2(x) = w_2(a) \geqq \alpha_2$, car $w_2(b) = w_2(a+b+1)$, $w_i(x) = w_i(a) + w_i(b) \geqq \alpha_i$ $(i = 3, \ldots, r-1)$ car $w_i(a+b+1) = 0$, $w_r(x) = w_r(b) \geqq \alpha_r$, car $w_r(a) = w_r(a+b+1)$.

Lemme 9. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leqq$) d'un corps K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, da façon que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ soit compatible. Soient $b_1, \ldots, b_r$ des éléments non nuls de K et supposons la numérotation des valuations telle que $w_i(b_i) \leqq \alpha_i$ lorsque $i = 1, \ldots, h$ et $w_i(b_i) > \alpha_i$ lorsque $i = h+1, \ldots, r$, où $0 \leqq h \leqq r$. Si pour tout indice $i = 1, \ldots, h$ on a $\alpha_i - w_i(b_i) \in \bigcap_{j=1, j \neq i}^{r} \Delta_{ij}$ alors il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x - b_i) \geqq \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$.

Démonstration. Pour tout indice $i = 1, \ldots, r$ notons $\Delta_i = \bigcap_{j=, j \neq i}^{r} \Delta_{ij}$, donc $\Delta_i \neq (0)$ car les valuations sont deux à deux incomparables. Si pour l'indice i on a $w_i(b_i) = \alpha_i$, prenons $\delta_i \in \Delta_i$, $0 < \delta_i$, et remplaçons α_i par $\alpha_i + \delta_i > \alpha_i$. Il résulte qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où on a $w_i(b_i) < \alpha_i$ lorsque $i = 1, 2, \ldots, h$ et $w_i(b_i) > \alpha_i$ lorsque $i = h+1, \ldots, r$.

Considérons d'abord un indice i tel que $w_i(b_i) < \alpha_i$. Posons $\gamma_{ii} = w_i(b_i) - \alpha_i < 0$ donc $\gamma_{ii} \in \bigcap_{j=1, j \neq i}^{r} \Delta_{ij}$. De même, soit $\gamma_{ji} = \alpha_j - w_j(b_i)$ lorsque $j \neq i$, $j = 1, \ldots, r$. Alors $\bar{\gamma}_{ji} = \bar{\alpha}_j - \overline{w_j(b_i)} = \bar{\alpha}_i - \overline{w_i(b_i)} = -\bar{\gamma}_{ii} = \bar{0}$, c'est-à-dire, $\gamma_{ji} \in \Delta_{ji}$. Posons $\delta_{ji} = \gamma_{ji}$ lorsque $0 < \gamma_{ji}$ et prenons un élément $\delta_{ji} \in \Delta_{ji}$, $0 < \delta_{ji}$, lorsque $\gamma_{ji} \leqq 0$. Par le lemme 8, il existe un élément $z_i \in K$ tel que $w_i(z_i) \leqq \gamma_{ii} < 0$ et $w_j(z_i) \geqq \delta_{ji} > 0$ (pour $j \neq i$, $j = 1, \ldots, r$).

Considérons maintenant un indice i tel que $w_i(b_i)>\alpha_i$. Posons $\gamma_{ii}=w_i(b_i)-\alpha_i>0$ et soit un élément $\delta_{ii}\in\bigcap_{j=1,\,j\neq i}^{r}\Delta_{ij}$ tel que $\delta_{ii}<0<\gamma_{ii}$. De même, soit $\gamma_{ji}=\alpha_j-w_j(b_i)$ lorsque $j\neq i$, $j=1,\ldots,r$. Posons $\delta_{ji}=\gamma_{ji}$ lorsque $\gamma_{ji}>0$, et prenons un élément $\delta_{ji}\in\Delta_{ji}$ tel que $0<\delta_{ji}$ lorsque $\gamma_{ji}\leqq 0$; alors on a toujours $0<\delta_{ji}\in\Delta_{ji}$, $\gamma_{ji}\leqq\delta_{ji}$, car si $0<\gamma_{ji}$ il vient $\bar{0}\leqq\bar{\gamma}_{ji}=\bar{\alpha}_j-\overline{w_j(b_i)}=\bar{\alpha}_i-\overline{w_i(b_i)}=-\bar{\gamma}_{ii}\leqq\bar{0}$, c'est-à-dire $\gamma_{ji}\in\Delta_{ji}$. Par le lemme 8, il existe un élément $z_i\in K$ tel que $w_i(z_i)\leqq\delta_{ii}<0$ et $w_j(z_i)\geqq\delta_{ji}>0$ $(j\neq i,\ j=1,\ldots,r)$.

Soit maintenant pour tout indice $i=1,2,\ldots,r$ l'élément $t_i=z_i/(z_i+1)$. Alors $t_i-1=-1/(z_i+1)$, donc $w_i(t_i-1)=-w_i(z_i+1)=-w_i(z_i)\geqq-\gamma_{ii}=\alpha_i-w_i(b_i)$ et pour tout $j\neq i$, $j=1,\ldots,r$, $w_j(t_i)=w_j(z_i)-w_j(z_i+1)=w_j(z_i)\geqq\delta_{ji}\geqq\gamma_{ji}=\alpha_j-w_j(b_i)$.

Enfin, soit $x=\sum_{j=1}^{r}t_jb_j$, donc $x-b_i=(t_i-1)\cdot b_i+\sum_{j\neq i}t_jb_j$. Alors, pour tout indice $i=1,\ldots,r$, on a $w_i(x-b_i)\geqq\min_{j\neq i}\{w_i(t_i-1)+w_i(b_i),\,w_i(t_j)+w_i(b_j)\}\geqq\alpha_i$, en vertu de la détermination des éléments t_i $(i=1,\ldots,r)$.

Lemme 10. Soient $w_1,\ldots,w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leqq$) d'un corps K et $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ des éléments appartenant respectivement aux groupes $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r$ des valuations données, de façon que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ soit compatible. Supposons que $b_1,\ldots,b_r$ soient des éléments de K de façon qu'on ait $\alpha_i-w_i(b_i)\in\bigcap_{j=1,\,j\neq i}^{r}\Delta_{ij}$ pour tout indice i tel que $w_i(b_i)<\alpha_i$. Alors il existe $x\in K$ tel que $w_i(x-b_i)=\alpha_i$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$.

Démonstration. Pour tout indice $i=1,\ldots,r$ soit $z_i\in K$, $z_i\neq-b_i$, tel que $w_i(z_i)=\alpha_i$ et posons $y_i=z_i+b_i\neq 0$, donc $w_i(y_i-b_i)=w_i(z_i)=\alpha_i$; ainsi, si $w_i(b_i)>\alpha_i$ alors $w_i(y_i)=\alpha_i$, si $w_i(b_i)=\alpha_i$ alors $w_i(y_i)\geqq\alpha_i$ et si $w_i(b_i)<\alpha_i$ alors $w_i(y_i)=w_i(b_i)$.

Soit $(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_r$ compatible, et $0<\delta_1\in\Delta_1,\ldots,0<\delta_r\in\Delta_r$ (voir les notations au lemme 9). Donc $(\alpha_1+\delta_1,\ldots,\alpha_r+\delta_r)$ est aussi compatible. Si pour l'indice i on a $w_i(y_i)<\alpha_i+\delta_i$ alors $\alpha_i+\delta_i-w_i(y_i)\in\bigcap_{j=1,\,j\neq i}^{r}\Delta_{ij}$, en vertu de l'hypothèse que $\alpha_i-w_i(b_i)\in\bigcap_{j=1,\,j\neq i}^{r}\Delta_{ij}$ lorsque $w_i(b_i)<\alpha_i$. Par le lemme 9, il existe un élément $x\in K$ tel que $w_i(x-y_i)\geqq\alpha_i+\delta_i$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$. Donc, de $w_i(y_i-b_i)=\alpha_i$ il résulte que $w_i(x-b_i)=\alpha_i$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$.

Corollaire 1. Le théorème 5 est vrai.

En effet, il suffit de prendre $b_1=\cdots=b_r=0$ dans le lemme 10.

Corollaire 2. Le théorème 4′ est vrai.

En effet, il suffit de remarquer que si w_i, w_j sont des valuations indépendantes alors $\Delta_{ij}=\Gamma_i$.

Le théorème suivant est la généralisation du théorème 4′:

Théorème 5′. Soient $w_1,\ldots,w_r$ des valuations (deux à deux incomparables selon $\leqq$) d'un corps K, soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ des éléments appartenant

respectivement aux groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ des valuations données, de façon que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ soit compatible; enfin, soient $b_1, \ldots, b_r$ des éléments appartenant à K. Pour qu'il existe un élément $x \in K$ tel que $w_i(x - b_i) = \alpha_i$ (pour $i = 1, \ldots, r$) il faut et il suffit qu'on ait:

(I) si $w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$ alors $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \in \Delta_{ij}$ (où Δ_{ij} désigne le sous-groupe isolé de Γ_i qui correspond au plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations w_i, w_j).

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons qu'on ait $w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$; de $w_i(x - b_i) = \alpha_i$, $w_j(x - b_j) = \alpha_j$ il vient $w_i(x - b_j) = w_i(b_i - b_j) < \alpha_i$. Donc $\bar{\alpha}_i \geq \overline{w_i(b_i - b_j)} = \overline{w_i(x - b_j)} = \overline{w_j(x - b_j)} = \bar{\alpha}_j$ et de $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$ il vient $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \in \Delta_{ij}$.

La condition est suffisante. Remarquons tout d'abord que la condition (I) entraîne succesivement les conditions suivantes:

(II) Si $w_i(b_i) \leq \alpha_i$ alors $\alpha_i - w_i(b_i) \in \Delta_{ij}$ pour tout indice j tel que $\alpha_j < w_j(b_j)$.

(III) Si $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors $w_i(b_i) = w_i(b_j)$.

(IV) Si $w_i(b_i) \leq \alpha_i$ et $w_j(b_j) \leq \alpha_j$ alors $\overline{w_i(b_i)} = \overline{w_j(b_j)}$.

En effet, si on avait $w_i(b_i) \leq \alpha_i$, $\alpha_j < w_j(b_j)$ et $\alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors $\overline{w_i(b_i)} < \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j \leq \overline{w_j(b_j)} = \overline{w_i(b_j)}$ donc $w_i(b_i) < w_i(b_j)$ d'où $w_i(b_i - b_j) = w_i(b_i) < \alpha_i$ et $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) = \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$, absurde, en vertu de (I). Cela montre (II).

De même, soit $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$; si on avait $w_i(b_i) < w_i(b_j)$ alors $w_i(b_i - b_j) = w_i(b_i) < \alpha_i$ et $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) = \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$, absurde; enfin, si on avait $w_i(b_j) < w_i(b_i)$ alors $w_i(b_i - b_j) = w_i(b_j) < w_i(b_i) < \alpha_i$ et $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) > \alpha_i - w_i(b_i) > 0$ donc $\alpha_i - w_i(b_i - b_j) \notin \Delta_{ij}$, absurde. Cela montre (III).

Enfin, si $0 < \alpha_i - w_i(b_i) \notin \Delta_{ij}$ alors $w_i(b_i) = w_i(b_j)$ par (III), donc $\overline{w_i(b_i)} = \overline{w_i(b_j)} = \overline{w_j(b_j)}$; si par contre $\alpha_i - w_i(b_i) \in \Delta_{ij}$ alors $\alpha_j - w_j(b_i) \in \Delta_{ji}$; or si c'était $\alpha_j - w_j(b_j) \notin \Delta_{ji}$ alors par (III) il serait $w_j(b_j) = w_j(b_i)$ d'où $\alpha_j - w_j(b_j) = \alpha_j - w_j(b_i) \notin \Delta_{ji}$, absurde; ainsi, on a $\alpha_j - w_j(b_j) \in \Delta_{ji}$, c'est-à-dire $\overline{w_i(b_i)} = \bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j = \overline{w_j(b_j)}$. Cela montre (IV).

Remarquons maintenant qu'il est possible de réduire la démonstration du théorème au cas où on a $w_i(b_i) < \alpha_i$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, r$). En effet, prenons pour cela $(\delta_1, \ldots, \delta_r) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_r$ où $\Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{ij} \neq (0)$ (car les valuations sont deux à deux incomparables) et choisis de la façon suivante: si $w_i(b_i) < \alpha_i$ prenons $\delta_i = 0$, si $w_i(b_i) \geq \alpha_i$ prenons $\delta_i > 0$. Alors $(\alpha_1 - \delta_1, \ldots, \alpha_r - \delta_r) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est encore compatible. Par le corollaire 1 au lemme 10 il existe un élément $y \in K$ tel que $w_i(y) = \alpha_i - \delta_i$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, r$); donc $w_i(y + b_i) = w_i(b_i)$ lorsque $w_i(b_i) < \alpha_i$ et $w_i(y + b_i) = w_i(y) = \alpha_i - \delta_i$ lorsque $w_i(b_i) \geq \alpha_i$. Posons $c_i = y + b_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, donc $w_i(c_i) < \alpha_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Or, les éléments c_i vérifient encore la condition (I) (relativement aux éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$) car $c_i - c_j = b_i - b_j$. Ainsi, si on a déjà démontré le théorème pour le cas des éléments $c_1, \ldots, c_r$, où $w_i(c_i) < \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ alors il existe $z \in K$ tel que $w_i(z - c_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ donc si $x = z - y$ alors $w_i(x - b_i) = w_i(z - y - b_i) = w_i(z - c_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

De cette remarque, nous voyons qu'il est possible de supposer sans perte de généralité qu'on a $w_i(b_i)<\alpha_i$ $(i=1,\ldots,r)$.

Avant de commencer la démonstration proprement dite, faisons encore une remarque. Posons $b_i\equiv b_j$ lorsqu'on a $0<\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ij}$. Montrons qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. En effet, d'abord on a $b_i\equiv b_i$ car $0<\alpha_i-w_i(b_i)$ et $\Delta_{ii}=(0)$. Si $b_i\equiv b_j$ alors $0<\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ij}$ donc de $w_i(b_i)=w_j(b_j)$ par (IV), on a $\bar\alpha_j-w_j(b_j)=\bar\alpha_i-w_i(b_i)\neq\bar 0$ donc $0<\alpha_j-w_j(b_j)\notin\Delta_{ji}$, c'est-à-dire $b_j\equiv b_i$. Si $b_i\equiv b_j$ et $b_j\equiv b_k$ alors $0<\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ij}$, $0<\alpha_j-w_j(b_j)\notin\Delta_{jk}$. Si $\Delta_{ij}\geqq\Delta_{ik}$ alors $0<\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ik}$ donc $b_i\equiv b_k$. Si par contre $\Delta_{ij}<\Delta_{ik}$ alors on a $\mathfrak{p}_{ij}\supset\mathfrak{p}_{ik}$ donc $\mathfrak{p}_{jk}=\mathfrak{p}_{ik}$ (où $\mathfrak{p}_{ij}$ est le plus grand idéal premier commun aux anneaux A_i, A_j, $\mathfrak{p}_{ik}$ celui commun aux anneaux A_i, A_k et enfin $\mathfrak{p}_{jk}$ celui commun aux anneaux A_j, A_k); alors $\Delta_{kj}=\Delta_{ki}$. Si on avait $\alpha_i-w_i(b_i)\in\Delta_{ik}$ alors en vertu de (IV) on aurait $\alpha_k-w_k(b_k)\in\Delta_{ki}=\Delta_{kj}$ donc en vertu de (IV) on aurait $\alpha_j-w_j(b_j)\in\Delta_{jk}$, absurde. Donc $0<\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ik}$, d'où $b_i\equiv b_k$.

La démonstration du théorème sera fait par induction sur la longueur l de l'arbre $\mathfrak{U}$ engendré par les valuations données $w_1,\ldots,w_r$. Si $l=1$ le théorème est trivial.

Soit $l=2$; alors pour des indices distincts quelconques i,j, $A_i\cdot A_j=B$ est l'anneau d'une valuation v de K. Si v est la valuation triviale de K, c'est-à-dire, si les valuations données sont deux à deux indépendantes, alors la condition (I) est vide et le théorème se réduit au corollaire 2 du lemme 10. Par contre, si $B\neq K$, notons $\mathfrak{p}$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux $A_1,\ldots,A_r$ (donc $\mathfrak{p}\neq(0)$); remarquons qu'on a, avec les notations déjà introduites, $\Delta_i=\Delta_{ij}$ (pour des indices distincts quelconques i,j). Si on a $\alpha_i-w_i(b_i)\in\Delta_{ij}$ pour des indices distincts quelconques i,j, alors le théorème se réduit à un cas particulier du lemme 10. Si par contre il existe des indices distincts i,j, tels que $\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ij}$ alors si k est un autre indice $(1\leqq k\leqq r, k$ distinct de i et de $j)$ alors de $\Delta_i=\Delta_{ij}=\Delta_{ik}$ il vient $\alpha_i-w_i(b_i)\notin\Delta_{ik}$. Or, par la remarque faite ci-dessus on déduit que les éléments $b_1,\ldots,b_r$ appartiennent à une classe d'équivalence unique. Par la condition (III) on a $w_i(b_1)=\cdots=w_i(b_r)$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$; posons $\beta_i=w_i(b_1)$. Soit $e_i=b_i/b_1$ donc $w_i(e_1)=w_i(e_2)=\cdots=w_i(e_r)=0$ pour tout indice $i=1,\ldots,r$. Posons $\gamma_i=\alpha_i-\beta_i$ $(i=1,\ldots,r)$, donc $0<\gamma_i\notin\Delta_{ij}=\Delta_i$ pour i,j quelconques distincts. Enfin, de $\alpha_i-w_i(b_i-b_j)\in\Delta_{ij}$ lorsqu'on a $w_i(b_i-b_j)<\alpha_i$ il vient $\gamma_i-w_i(e_i-e_j)=\alpha_i-\beta_i-[w_i(b_i-b_j)-w_i(b_1)]\in\Delta_{ij}$ lorsque $w_i(e_i-e_j)<\gamma_i$. Posons $e_i'=e_i-e_1=e_i-1$; alors si $w_i(e_i')<\gamma_i$ on a $\gamma_i-w_i(e_i')\in\Delta_{i1}=\Delta_i=\Delta_{ij}$ pour tout indice $j\neq i$. Par le lemme 10 il existe $y\in K$ tel que $w_i(y-e_i')=\gamma_i$ $(i=1,\ldots,r)$; posons $x'=y+e_1$, donc $w_i(x'-e_i)=w_i(y+e_1-e_i)=w_i(y-e_i')=\gamma_i$ $(i=1,\ldots,r)$. Enfin, soit $x=b_1\cdot x'$ donc $w_i(x-b_i)=w_1(b_1x'-b_1e_i)=w_i(b_1)+w_i(x'-e_i)=\beta_i+\gamma_i=\alpha_i$ $(i=1,\ldots,r)$.

Supposons maintenant que le théorème soit vrai lorsque la longueur de l'arbre $\mathfrak{U}$ est strictement inférieure à l (où $l>2$).

Soit u la valuation de K égale à la borne inférieure des valuations données, $u=w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_r$, donc u est l'élément minimal de l'arbre $\mathfrak{U}$ selon $\leq$;

notons C l'anneau de la valuation u de K. De même, notons $v_1, \ldots, v_s$ les valuations de K qui sont les éléments minimaux distincts de u appartenant à l'arbre $\mathfrak{U}$ (donc $s \geq 2$) et soient respectivement $B_1, \ldots, B_s$ leurs anneaux de valuation. Ensuite, numérotons les valuations données $w_1, \ldots, w_r$ de façon que pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{ir_i}$ soient exactement les valuations plus fines que v_i; notons A_{ij}, Γ_{ij}, respectivement l'anneau et le groupe de valeurs de w_{ij} (pour i, j quelconques) et de même soient $\alpha_{ij} \in \Gamma_{ij}$ et $b_{ij} \in K$ les éléments données (correspondant respectivement aux valuations w_{ij}). Pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, soit $\mathfrak{p}_i$ le plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations $w_{i1}, \ldots, w_{ir_i}$ (i fixe) et dans chaque groupe Γ_{ij} soit Δ_{ij} le sous-groupe isolé correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{p}_i$ (attention au changement de notation!); alors pour tout indice $i = 1, \ldots, s$ on a $B_i = A_{i1} \cdot A_{i2} \ldots A_{ir_i} = (A_{ij})_{\mathfrak{p}_i}$ (j quelconque), $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal maximal de B_i et le groupe Ξ_i de la valuation v_i s'écrit $\Xi_i \cong \Gamma_{ij}/\Delta_{ij}$ (j quelconque). De même, si $\mathfrak{q}$ désigne le plus grand idéal premier commun aux anneaux A_{ij} (i, j quelconques) alors pour tout indice i on a $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_i$ et $C = (B_i)_{\mathfrak{p}} = (A_{ij})_{\mathfrak{p}}$ (i, j quelconques), $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal de C et si Λ_{ij} est le sous-groupe isolé de Γ_{ij} qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{q}$, alors le groupe de valeurs Θ de u s'écrit $\Theta = \Gamma_{ij}/\Lambda_{ij} \cong \Xi_i/\Pi_i$ où $\Pi_i = \Lambda_{ij}/\Delta_{ij}$ (i, j quelconques).

En vertu de l'hypothèse, pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, on a $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ik}$ (j, k quelconques) et ainsi les éléments $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir_i}$ définissent un élément $\beta_i \in \Xi_i$; il est clair que $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$ est compatible, car si $i \neq i'$, on déduit de $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{i'j'}$ que $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{i'}$.

Par l'hypothèse la condition (I) est vérifiée pour les valuations $w_{i1}, \ldots, w_{ir_i}$, pour les éléments $b_{i1}, \ldots, b_{ir_i} \in K$ et $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir_i}) \in \Gamma_{i1} \times \cdots \times \Gamma_{ir_i}$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, s$); or, pour tout indice i, l'arbre $\mathfrak{U}_i$ engendré par les valuations $w_{i1}, \ldots, w_{ir_i}$ possède longueur strictement inférieure à l, donc il existe un élément $x_i \in K$ tel que $w_{ij}(x_i - b_{ij}) = \alpha_{ij}$ ($j = 1, \ldots, r_i$; i fixe).

Prenons $(\pi_1, \ldots, \pi_s) \in \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_s$, $0 < \pi_i$ ($i = 1, \ldots, s$); donc $(\beta_1 + \pi_1, \ldots, \beta_s + \pi_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$ est encore compatible. Montrons que la condition (I) est vérifiée pour les valuations $v_1, \ldots, v_s$, les éléments $x_1, \ldots, x_s \in K$ et $(\beta_1 + \pi_1, \ldots, \beta_s + \pi_s) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_s$. En effet, si $\beta_i \leq v_i(x_i - x_{i'}) < \beta_i + \pi_i$ ($1 \leq i, i' \leq s$, $i \neq i'$) alors $\beta_i + \pi_i - v_i(x_i - x_{i'}) \leq \pi_i \in \Pi_i$ (remarquer que l'arbre engendré par les valuations $v_1, \ldots, v_s$, possède longueur 2, donc Π_i est le sous-groupe isolé de Ξ_i qui correspond au plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations $v_i, v_{i'}$). Soit $v_i(x_i - x_{i'}) < \beta_i$ ($1 \leq i, i' \leq s$, $i \neq i'$). Si $v_i(b_{ij} - b_{i'j'}) \geq \beta_i$ (où $1 \leq j \leq r_i$, $1 \leq j' \leq r_{i'}$) alors de $v_i(x_i - b_{ij}) = \beta_i$, $v_{i'}(x_{i'} - b_{i'j'}) = \beta_{i'}$ il vient $v_i(x_i - b_{ij}) = \bar{\beta}_i = \bar{\beta}_{i'} = v_{i'}(x_{i'} - b_{i'j'}) = v_i(x_{i'} - b_{i'j'})$ et de $x_i - x_{i'} = (x_i - b_{ij}) + (b_{ij} - b_{i'j'}) + (b_{i'j'} - x_{i'})$ il vient $v_i(x_i - x_{i'}) = v_i(x_{i'} - b_{i'j'}) < \beta_i$ donc $\beta_i - v_i(x_i - x_{i'}) = \beta_i - v_i(x_{i'} - b_{i'j}) \in \Pi_i$. Si par contre $v_i(b_{ij} - b_{i'j'}) < \beta_i$ alors $w_{ij}(b_{ij} - b_{i'j'}) < \alpha_{ij}$ donc par la condition (I), valable par hypothèse, on déduit que $\alpha_{ij} - w_{ij}(b_{ij} - b_{i'j'}) \in \Lambda_{ij}$ (car Λ_{ij} est le sous-groupe isolé de Γ_{ij} qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{q}$ qui est le plus grand idéal premier commun aux anneaux des valuations w_{ij}, $w_{i'j'}$ lorsque

$i \neq i'$), donc $\beta_i - v_i(b_{ij} - b_{i'j'}) \in \Pi_i = \Lambda_{ij}/\Delta_{ij}$; on conclut de même que $\beta_i - v_i(x_i - x_{i'}) \in \Pi_i$.

Puisque l'arbre engendré par les valuations $v_1, \ldots, v_s$ possède longueur 2, il existe alors un élément $x \in K$ tel que $v_i(x - x_i) = \beta_i + \pi_i$. Donc $w_{ij}(x - x_i) > \alpha_{ij}$ pour i, j quelconques.

Or, de cela on conclut que $w_{ij}(x - b_{ij}) = \min\{w_{ij}(x - x_i), w_{ij}(x_i - b_{ij})\} = \alpha_{ij}$ pour des indices quelconques i, j. Cela termine de démontrer le théorème.

Nous concluons ce numéro avec une remarque. Dans l'enoncé du théorème 5' nous avons supposé que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ était compatible. Il ne faut pas croire que cela soit nécessaire pour la validité du théorème, lorsque $b_1, \ldots, b_r$ ne sont pas tous nuls. En effet, par exemple, soient données les valuations w_1, w_2, les éléments α_1, α_2 appartenant respectivement à leurs groupes de valeurs et tels que $\bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1$; enfin, soient $b_1, b_2 \in K$ tels que $w_1(b_1) = \alpha_1$, $w_2(b_2) = \alpha_2$; alors si $x = 0$, on a $w_1(x - b_1) = w_1(b_1) = \alpha_1$, $w_2(x - b_2) = w_2(b_2) = \alpha_2$ et néanmoins (α_1, α_2) n'est pas compatible. Quoique cet exemple montre que la compatibilité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ ne soit pas nécessaire, dans la pratique on peut fort bien se borner à considérer seulement ce cas, qui suffit pour les applications.

4. Nous allons appliquer le théorème d'approximation sous sa forme générale pour l'étude de l'arithmétique d'un anneau intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuation. Les résultats qui nous obtiendrons généralisent les lemmes 5 et 6 pour le cas où les valuations données ne sont pas nécessairement deux à deux indépendantes.

Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K qui nous supposerons deux à deux incomparables selon la relation $\leqq$, notons $A_1, \ldots, A_r$ leurs respectifs anneaux de valuation et soit $A = A_1 \cap \cdots \cap A_r$. Pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, soit l'idéal premier $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ de la suite de position de w_i relativement à $\{w_1, \ldots, w_r\}$ donc $\Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Lambda_{ij}$ est le sous-groupe isolé de Γ_i qui correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}_i^{(1)}$. Remarquons que lorsque les valuations données sont deux à deux indépendantes alors les idéaux premiers $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ sont tous nuls.

Théorème 6. Avec les notations ci-dessus, pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, soit $\mathfrak{a}_i$ un idéal de l'anneau A_i tel que $\mathfrak{p}_i^{(1)} < \mathfrak{a}_i \subseteqq A_i$ et $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$ (idéal de l'anneau intersection $A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$); alors, on a $\mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Réciproquement, soit $\mathfrak{a}$ un idéal de l'anneau A tel que pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, on ait $\mathfrak{p}_i^{(1)} < \mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$; alors $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$.

Démonstration. Soit d'abord pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, r$, $\mathfrak{a}_i$ un idéal de l'anneau A_i, de façon que $\mathfrak{p}_i^{(1)} < \mathfrak{a}_i \subseteqq A_i$ et soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$. Donc, on a $A_i \cdot \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Prenons des éléments $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $a_i \notin \mathfrak{p}_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, r)$ et soit $w_i(a_i) = \alpha_i > 0$. Si, pour tout indice i, $\Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Lambda_{ij}$, alors Δ_i est le sous-groupe isolé de Γ_i qui

correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}_i^{(1)}$, donc $w_i(a_i) = \alpha_i \in \Delta_i$. De cela il résulte que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est compatible. Par le théorème 5, il existe alors un élément $a \in K$ tel que $w_i(a) = \alpha_i \geqq 0$, donc $a \in A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$. En outre, pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, l'élément a/a_i est une unité de A_i. Donc $a \in A_i a_i \subseteqq A_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i$, $a \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$ et $a_i \in A_i a \subseteqq A_i \mathfrak{a}$. Cela montre que le complémentaire de $\mathfrak{p}_i^{(1)}$ dans l'ensemble $\mathfrak{a}_i$ est contenu dans $A_i \mathfrak{a}$ (pour tout indice $i = 1, \ldots, r$).

Montrons maintenant que $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subseteqq A_i \cdot \mathfrak{a}$, d'où il résultera que $\mathfrak{a}_i \subseteqq A_i \mathfrak{a}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Soit $b \in \mathfrak{p}_i^{(1)}$, donc $w(b) \notin \Delta_i$. Si on prend maintenant des éléments $a_j \in \mathfrak{a}_j$, $a_j \notin \mathfrak{p}_j^{(1)}$, comme ci-dessus, on voit que l'élément $a \in A$ tel que $w_j(a) = w_j(a_j) \in \Delta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ appartient à $\mathfrak{a}$. Donc $w_i(a) < w_i(b)$, car $w_i(b) \notin \Delta_i$ et alors $b \in A_i \cdot a \subseteqq A_i \mathfrak{a}$.

Réciproquement, soit maintenant $\mathfrak{a}$ un idéal de l'anneau A tel que $\mathfrak{p}_i^{(1)} \subset A_i \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$, pour tout indice $i = 1, \ldots, r$. Il est clair que $\mathfrak{a} \subseteqq \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$; montrons que $\mathfrak{a} \supseteqq \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$.

Tout d'abord, remarquons que $w_i(\mathfrak{a}) = w_i(\mathfrak{a}_i)$. En effet, de $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}_i$ il vient $w_i(\mathfrak{a}) \geqq w_i(\mathfrak{a}_i)$, et de $\mathfrak{a}_i = A_i \cdot \mathfrak{a}$ il résulte que $w_i(\mathfrak{a}_i)$ est contenu dans la classe supérieure de Γ_i engendrée par l'ensemble $w_i(\mathfrak{a})$. Ainsi, pour montrer que $w_i(\mathfrak{a}) = w_i(\mathfrak{a}_i)$ il suffit de montrer que $w_i(\mathfrak{a})$ est une classe supérieure de Γ_i. Or, soit $\alpha_i = w_i(a)$, $a \in \mathfrak{a}$ et $\alpha_i < \beta_i \in \Gamma_i$ donc $0 < \gamma_i = \beta_i - \alpha_i \in \Gamma_i$. Remarquons qu'il existe $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_r$, compatible, avec $0 \leqq \gamma_i$ pour tout indice $i = 1, \ldots, r$[0]). Par le théorème 5, si $c \in A$ est tel que $w_j(c) = \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ alors $c \cdot a \in A \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ et $w_i(ca) = \gamma_i + \alpha_i = \beta_i$, donc $\beta_i \in w_i(\mathfrak{a})$.

Ceci étant démontré, soit $a \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i$ et $w_i(a) = \alpha_i \in w_i(\mathfrak{a}_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$. Pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, il existe $a_i \in \mathfrak{a}$ tel que $w_i(a_i) = \alpha_i$. Pour tout couple d'indices $i, j = 1, \ldots, r$, soit $\beta_{ij} \in \Gamma_j$ l'élément ainsi défini: posons $\beta_{ii} = 0$; ensuite, si $\alpha_j < w_j(a_i)$ et $w_j(a_i) - \alpha_j \notin \Delta_j$, posons $\beta_{ij} = 0$; et enfin, dans les cas restants, soit $\delta_{ij} \in \Delta_j$ tel que $\delta_{ij} > \max\{0, w_j(a_i) - \alpha_j\}$, et alors posons $\beta_{ij} = \alpha_j + \delta_{ij} - w_j(a_i) > 0$. Alors, pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{ir}) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible, comme on le vérifie immédiatement. Par le théorème 5, il existe des éléments $b_i \in A$ $(i = 1, \ldots, r)$ tels que $w_j(b_i) = \beta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$. De cela il résulte que si $b = \sum_{i=1}^{r} b_j a_j \in A \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ alors $w_i(b_i a_i) = w_i(a_i) = \alpha_i$ et si $j \neq i$ on a $w_i(b_j a_j) = \beta_{ji} + w_i(a_j) > \alpha_i$ (dans tous les cas possibles). On conclut que $w_i(b) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Puisque $a/b \in A$ il résulte que $a \in A \cdot b \subseteqq A \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

[0]) Nous avons fait usage du fait suivant que se démontre facilement par induction sur le nombre r de valuations: si $w_1, \ldots, w_r$ sont des valuations deux a deux incomparables selon $\leqq$ d'un corps K, si $0 < \gamma_1 \in \Gamma_1$, alors il existe des éléments positifs $\gamma_2 \in \Gamma_2, \ldots, \gamma_r \in \Gamma_r$, tels que $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_r$ soit compatible. En effet, si l'affirmation a déjà été montrée pour $r - 1$ valuations, soient les éléments positifs $\gamma_2 \in \Gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1} \in \Gamma_{r-1}$, tels que $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1})$ soit compatible. Si $\mathfrak{p}_r^{(1)} \subseteqq A_i$, prenons $\gamma_r \in \Gamma_r$, positif, tel que $\bar{\gamma}_r = \bar{\gamma}_i$; on vérifie aisément que $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ est compatible.

Remarque. Le théorème n'est plus valable lorsqu'on considère des idéaux entiers quelconques $\mathfrak{a}_i$ des anneaux A_i. C'est ce qui montre l'exemple suivant. Soient les anneaux de valuation A_1, A_2, A_3 d'un corps K, de façon que $A_1 A_2 = B = (A_1)_{\mathfrak{p}} = (A_2)_{\mathfrak{p}}$, (où $\mathfrak{p}$ est le plus grand idéal premier commun à A_1 et à A_2), et $A_1 A_3 = A_2 A_3 = K$; alors on a $\mathfrak{p}_1^{(1)} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_2^{(1)} = \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}_3^{(1)} = (0)$. Si $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ et si $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3)$ alors $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{3} \mathfrak{a}_i = (0)$, néanmoins $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_1 + A_1 \cdot \mathfrak{a} = (0)$.

Pour la généralisation du lemme 6, faisons les considérations suivantes.

Si A_1, A_2 sont les anneaux des valuations w_1, w_2 du corps K, soit $\mathfrak{p}$ le plus grand idéal premier commun à A_1, A_2, et $B = A_1 \cdot A_2 = (A_1)_{\mathfrak{p}} = (A_2)_{\mathfrak{p}}$; notons $\mathcal{K} = B/\mathfrak{p}$ et dans le corps $\mathcal{K}$ soient les valuations w_1', w_2' ayant anneaux de valuation respectivement égaux à $A_1/\mathfrak{p}$, $A_2/\mathfrak{p}$, donc leurs corps des restes coincident respectivement avec $\mathcal{K}_1^0$ et $\mathcal{K}_2^0$ (corps des restes de K par les valuations w_1, w_2). Notons $\varphi_1 : A_1/\mathfrak{p} \to \mathcal{K}_1^0$, $\varphi : A_2/\mathfrak{p} \to \mathcal{K}_2^0$ les applications canoniques de passage au corps des restes.

Définition. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K, et $b_1, \ldots, b_r$ des éléments appartenant respectivement aux corps des restes $\mathcal{K}_1^0, \ldots, \mathcal{K}_r^0$, des valuations données. On dit que $(b_1, \ldots, b_r) \in \mathcal{K}_1^0 \times \cdots \times \mathcal{K}_r^0$ est compatible lorsque pour tout couple d'indices distincts i, j, on a $\varphi_i^{-1}(b_i) \cap \varphi_j^{-1}(b_j) \neq \emptyset$.

Si les valuations $w_1, \ldots, w_r$ de K sont deux à deux indépendantes, alors tout $(b_1, \ldots, b_r) \in \mathcal{K}_1^0 \times \cdots \times \mathcal{K}_r^0$ est compatible, en vertu du lemme 6.

Lemme 11. Soient $w_1, \ldots, w_r$ des valuations d'un corps K, et $\mathcal{K}_1^0, \ldots, \mathcal{K}_r^0$, leurs respectifs corps des restes. Si $(b_1, \ldots, b_r) \in \mathcal{K}_1^0 \times \cdots \times \mathcal{K}_r^0$ est compatible, il existe un élément $a \in A = \bigcap_{i=1}^{r} A_i$ (intersection des anneaux A_i des valuations w_i) dont la classe résidue selon la valuation w_i est égale à b_i (pour tout indice i).

Démonstration. Prenons dans chaque classe résidue $b_i \in \mathcal{K}_i^0$ $(i = 1, \ldots, r)$ un répresentant $a_i \in A_i$; tout revient à trouver un élément $a \in A$ tel que $a \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i}$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Notons $w_j(a_i) = \alpha_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, donc $\alpha_{ii} \geqq 0$; s'il existait un indice j tel que $\alpha_{ij} < 0$, alors $\bar{\alpha}_{ij} = \bar{\alpha}_{ii} = \bar{0}$. Prenons pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, un élément δ_i tel que $0 < \delta_i \in \Delta_i = \bigcap_{j \neq i} \Delta_{ij}$. Posons $\beta_{ii} = \delta_i$, si $j \neq i$ et $\alpha_{ij} < 0$ posons $\beta_{ij} = -\alpha_{ij}$, et enfin si $j \neq i$ et $\alpha_{ij} \geqq 0$ posons $\beta_{ij} = \delta_j$. Alors $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{ir}) \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_r$ est compatible. Par le théorème 5', il existe pour tout indice $i = 1, \ldots, r$, un élément $x_i \in K$ tel que $w_i(x_i - 1) = \beta_{ii}$ et $w_j(x_i) = \beta_{ij}$ (pour $j \neq i$); donc $x_i \in A$ et $x_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i^0}$. Soit $a_i' = x_i a_i$, donc $a_i' \in A$ $(i = 1, \ldots, r)$. Si le lemme a déjà été démontré lorsque les répresentants pris sont dans l'anneau A, alors il existe $a \in A$ tel que $a \equiv a_i' \pmod{\mathfrak{p}_i^0}$ pour $i = 1, \ldots, r$. Or, $a_i' - a_i = (x_i - 1) \cdot a_i \in \mathfrak{p}_i^0$, donc $a \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i^0}$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Ainsi, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $a_1, \ldots, a_r \in A$. Si on note $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i^0 \cap A$ $(i = 1, \ldots, r)$, nous devons résoudre le système de congruences deux à deux compatibles $x \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i}$, pour $i = 1, \ldots, r$, car

si $i \neq j$ alors $a_i - a_j \in \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$, en vertu de l'hypothèse faite sur la compatibilité de $(b_1, \ldots, b_r)$.

Nous utilisons maintenant un résultat connu à ce propos (voir BOURBAKI [1], page 27, exerc. 25), à savoir: pour l'existence de solution du système de congruences ci-dessus, il suffit de montrer que si $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqq r$, si $\mathfrak{a} = \bigcap_{h=1}^{q} \mathfrak{p}_{i_h}$ alors $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{p}_j + \mathfrak{p}_k) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_k)$; on peut naturellement supposer tous les indices $i_1, \ldots, i_q, j, k$ distincts et tout revient à montrer que $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{p}_j + \mathfrak{p}_k) \subseteqq (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_k)$.

Soit $x_j + x_k \in \mathfrak{a}$, où $x_j \in \mathfrak{p}_j$, $x_k \in \mathfrak{p}_k$, et supposons que $x_j \notin \mathfrak{a}$ (donc $x_k \notin \mathfrak{a}$) sinon il serait trivial. Posons $w_{i_h}(x_j) = \xi_h$ $(h = 1, \ldots, q)$, $w_j(x_j) = \xi_j$, $w_k(x_j) = \xi_k$, et soit $y_{i_h} = x_j$ $(h = 1, \ldots, q)$, $y_j = y_k = 0$. Par le théorème 5', il existe un élément $z \in K$ tel que $w_{i_h}(z - x_j) = \xi_h + \varepsilon_h > 0$ (où $0 < \varepsilon_h \in \Delta_{i_h}$), pour $h = 1, \ldots, q$, $w_j(z) = \xi_j > 0$, $w_k(z) = \xi_k + \varepsilon_k > 0$ (où $0 < \varepsilon_k \in \Delta_k$). Donc $z - x_j \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j$ et alors $w_{i_h}(z + x_k) = w_{i_h}[(z - x_j) + (x_j + x_k)] > 0$, donc $z + x_k \in \mathfrak{a}$, $z + x_k \in \mathfrak{p}_k$; de cela il résulte que $x_j + x_k = (x_j - z) + (z + x_k) \in (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_k)$. On a ainsi terminé de montrer le lemme.

Bibliographie

[1] BOURBAKI: Algèbre, chap. VI et VII. Paris: Hermann & Cie. 1953. — [2] BOURBAKI: Spécialisations et Valuations. Notes miméographiées. — [3] KRULL: Allgemeine Bewertungstheorie. J. f. Math. **167**, 160—196 (1932). — [4] JAFFARD: Théorie Arithmétique des Anneaux du Type de Dedekind, I. Bull. Soc. Math. France **80**, 61—100 (1952). — [5] NAGATA: On the Theory of Henselian Rings. Nagoya Math. J. **5**, 45—57 (1953).

Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro-Brasil

(Eingegangen am 26. August 1956)

PARAMESWARAN, M. R.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 19—26 (1957)

Some product theorems in summability *)

By
M. R. PARAMESWARAN

§ 1. Introduction. In this note we shall be concerned with a real sequence $s=\{s_n\}$ where $n=0, 1, 2, \ldots$ and two transforms of s: $(\mathscr{T}_1)s$ and $(\mathscr{T}_2)s$ corresponding to summability methods $(\mathscr{T}_1)$ and $(\mathscr{T}_2)$. Writing $(\mathscr{T}_1)[(\mathscr{T}_2)s]=(\mathscr{T}_1)(\mathscr{T}_2)s$ we find that SZÁSZ [8], RAJAGOPAL [6] and RAMANUJAN [7] have shown in certain cases that the summability method $(\mathscr{T}_1)(\mathscr{T}_2)$ includes the method $(\mathscr{T}_1)$; i.e., in the usual notation, $(\mathscr{T}_1)(\mathscr{T}_2)>(\mathscr{T}_1)$. Here on the other hand, we show that

(1) $$(\mathscr{T}_1)(\mathscr{T}_2)>(\mathscr{T}_1) \quad \text{as well as} \quad (\mathscr{T}_1)>(\mathscr{T}_1)(\mathscr{T}_2)$$

in certain cases where $(\mathscr{T}_2)s$ is a special transform which is Mercerian in the sense that (i) the method $(\mathscr{T}_2)$ is regular and (ii) a sequence summable $(\mathscr{T}_2)$ is necessarily convergent. More precisely, we prove a result of the following type.

Let $\{\lambda_n\}$ be a sequence of numbers, complex in general, and such that

(2) $$\sum_{n>0}|\lambda_n|<|\lambda_0|.$$

Let $(\mathscr{L}, \lambda_n)$ denote the method of transformation of the sequence $s=\{s_n\}$ to the sequence $t=\{t_n\}$ by the equations

(3) $$t_n=\frac{\lambda_0 s_n+\lambda_1 s_{n-1}+\cdots+\lambda_n s_0}{\sum\limits_{n\geq 0}\lambda_n}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots, \ldots\ ^{1}).$$

Then the transformation of s defined by (3), which may be shortly written $(\mathscr{L}, \lambda_n)s$, is Mercerian (in the sense already defined) whenever the condition (2) is satisfied, and, for certain methods of summability $(\mathscr{T}_1)$ to be specified presently, we have

(1′) $$(\mathscr{T}_1)>(\mathscr{T}_1)(\mathscr{L}, \lambda_n) \quad \text{and} \quad (\mathscr{T}_1)(\mathscr{L}, \lambda_n)>(\mathscr{T}_1).$$

In the case in which $\lambda_n=0$ for $n>k$ (a positive integer, or zero if we include the identity transformation $t_n=s_n$), we have instead of (3):

(3′) $$t_n=\frac{\lambda_0 s_n+\lambda_1 s_{n-1}+\cdots+\lambda_k s_{n-k}}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

*) Read at the 22nd Conference of the Indian Math. Soc., 1956.

1) It is of course assumed that the denominator of any "mean" such as that defined by (3) is not zero. In the case of the mean t_n of (3), the denominator $\sum\lambda_n\neq 0$ on account of (2). It is to be noted that Polya's Mercerian transformation $t_n=c\,s_n+(1-c)s_{n-1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $\mathrm{Re}\,(c)>\frac{1}{2}$ ([5], Abschn. III, Nr. 48) is a special case of (3) under the condition (2).

where we define $s_n = 0$ for all negative integers n. It is convenient to refer to the method $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ in this case as the method $(\mathscr{Z}_k)$, following SZÁSZ ([8], p. 81) who considers a $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ method, not subject to the condition (2) and wherein $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$, $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = 0$ and calls it the (Z_k) method.

In any case, the $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ method is similar to the NÖRLUND method $(\mathscr{N}, \lambda_n)$, the transform $(\mathscr{N}, \lambda_n)s$ being obtained from $(\mathscr{Z}, \lambda_n)s$ as defined in (3) by replacing the infinite series $\sum \lambda_n$ in (3) by $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ and condition (2) by $\lambda_n \geqq 0$.

Theorems 1, 2, 3 of this note are statements of the type (1'), with $(\mathscr{T}_1)$ particularised as either the NÖRLUND method $(\mathscr{N}, p_n)$ or the Abel method $(\mathscr{A})$ or the Borel method $(\mathscr{B})$. The converse parts of Theorems 1, 2 have been proved by VUČKOVIĆ ([9], Theorems 1 and 2) for method $(\mathscr{Z}_1)$ instead of either $(\mathscr{Z}, \lambda_n)$ or $(\mathscr{Z}_k)$, by arguments entirely differing from and more laboured than those of this note.

Theorem 4 shows that for a particular method $(\mathscr{Z}_1^*)$ associated with the method $(\mathscr{Z}_1)$ we have in certain cases the result

$$(\mathscr{B}) > (\mathscr{B})(\mathscr{Z}_1^*), \qquad \textit{but} \qquad (\mathscr{B})(\mathscr{Z}_1^*) \not\supset (\mathscr{B})$$

of which the negative half is due to SZASZ ([8], p. 81).

Theorem 5, the final result, extends a theorem of ANDERSEN'S, mentioned by VUČKOVIC ([9], p. 53). Its statement is again of the type (1') but it involves, instead of $(\mathscr{Z}, \lambda_n)s$ a regular Hausdorff transform of s which is Mercerian.

The proof of Theorem 1 involves an application of functional analysis to sequence-to-sequence matrix transformations which define the transform $t = \{t_n\}$ of $s = \{s_n\}$ by the equations

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} s_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Here, following the usual practice, we may denote the matrix (c_{nk}) by C and write (4) as the matrix equation $t = Cs$. Also, for a given C, we may write

$$(C)_{nk} = c_{nk}, \qquad \|C\| = \text{l. u. b.}_{0 \leq n < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|.$$

§ 2. Lemmas. Before proceeding to our theorems we may observe that the transform of the sequence s, denoted by t in Theorems 1, 3 and 5, our main results, is a Mercerian transform. This observation, in respect of the t in Theorems 1 and 3 becomes evident when we take $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = \cdots = 0$ in Theorem 1, thus establishing the equivalence of $s_n \to l$ [2]) and $t_n \to l$ in Theorem 1 and hence in Theorem 3 as a particular case. As regards the t in Theorem 5, Lemma 2 shows that it is a Mercerian transform of s. The other lemmas below furnish important steps or arguments in our proofs.

Lemma 1. *Let Γ be a Banach algebra with unit element I, $\|I\| = 1$, and let A be an element of Γ, with norm less than unity. Then the element $I + A$ of Γ has an inverse $(I + A)^{-1}$ in Γ.*

[2]) In the present paper l always denotes a finite number.

Lemma 1'. *The set Γ of matrices C which transform every null sequence into a null sequence is a Banach algebra with the norm defined by:*

$$\|C\| = \text{l. u. b.}_{0 \le n < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}| .$$

Lemma 1 is well known (e.g., HILLE [3], p. 92). Lemma 1' is proved along the same lines as the parallel result for the set of convergence-preserving matrices (PARAMESWARAN [4], p. 364).

Lemma 2. *Let the matrix $H = (h_{nk})$ define a regular sequence-to-sequence Hausdorff transformation, and let I be the identity matrix. Then the matrix equation*

$$t = \frac{I + qH}{1 + q} s \tag{5}$$

where q is any number $\neq -1$, defines a regular Hausdorff transformation of the sequence s to the sequence t; and provided that

$$|q| \cdot \|H\| = |q| \cdot \text{l. u. b.}_{0 \le n < \infty} \sum_{k=0}^{n} |h_{nk}| < 1 , \tag{6}$$

the inverse of the transformation in (5) exists and is regular Hausdorff.

Proof. The first part is obvious. The second part follows from Lemma 1 and the result parallel to Lemma 1', for convergence-preserving matrices already referred to [4]. For, by these results the inverse of the transformation in (5) exists and is convergence-preserving; besides, we know that the inverse of a Hausdorff transformation is Hausdorff (when it exists) and the convergence-preserving inverse of a regular transformation is itself regular (COOKE [1], p. 177).

Lemma 3. *Let Λ be the matrix*

$$\Lambda = (\lambda_{nk}) = (\lambda_{n-k}) \tag{7}$$

where λ_n for non-negative n is the sequence appearing in (2) and λ_n for negative n is 0. Let

$$p_n \ge 0, \quad P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$(D_p)_{nk} = \begin{cases} P_n^{-1} & \text{for} \quad k = n \\ 0 & \text{for} \quad k \neq n \end{cases} \qquad (n, k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Then the matrix $D_p \Lambda D_p^{-1}$ transforms every null sequence into a null sequence and has an inverse $D_p \Lambda^{-1} D_p^{-1}$ with the same property.

Proof. It is easily seen by direct calculation that

$$(D_p \Lambda D_p^{-1})_{nk} = \lambda_{n-k} \cdot P_k P_n^{-1} \qquad (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

and therefore

$$\|D_p \Lambda D_p^{-1}\| = \text{l. u. b.}_{0 \le n < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{n-k} P_k P_n^{-1}| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < \infty ,$$

since $0<P_k\leqq P_n$ for $k\leqq n$ and $\lambda_{n-k}=0$ for $k>n$. Also $\lambda_{n-k}P_kP_n^{-1}\to 0$ as $n\to\infty$ for each fixed $k=0,1,2,\ldots$ since $\lambda_{n-k}\to 0$ and $P_kP_n^{-1}\leqq 1$ $(n>k)$. Thus $D_p A D_p^{-1}$ fulfils the necessary and sufficient conditins for transforming every null sequence into a null sequence. This proves the first part of the lemma.

For the second part, we have

$$\left\|\frac{D_p A D_p^{-1}}{\lambda_0}-I\right\|=\text{l. u. b.}_{0\leqq n<\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\lambda_{n-k}P_k}{\lambda_0 P_n}\right|<1,$$

since $0<P_k\leqq P_n$ and $|\lambda_0|>\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|$. It follows from Lemmas 1′, 1 that $D_p A D_p^{-1}$ has an inverse with the required property.

Lemma 4 (SZÁSZ [8], pp. 77–80; RAJAGOPAL [6], Corollary I). *Let $(\mathscr{T}_1)$ denote either* ABEL'S *method or* BOREL'S *method and let $(\mathscr{H})$ denote a regular Hausdorff method. Then*

$$(\mathscr{T}_1)(\mathscr{H})>(\mathscr{T}_1).$$

Lemma 5. *Let $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ be two regular Hausdorff methods. Then*

$$(\mathscr{H}_1)(\mathscr{H}_2)>(\mathscr{H}_1).$$

The proof is immediate since $(\mathscr{H}_1)(\mathscr{H}_2)=(\mathscr{H}_2)(\mathscr{H}_1)$.

Lemma 6. *Let $f(x)$ be a real-valued differentiable function and let α,β be real numbers having the same sign and such that $\alpha f(x)+\beta f'(x)\to 0$ as $x\to\infty$. Then $f(x)\to 0$ as $x\to\infty$.*

The proof is on exactly the same lines as for the case $\alpha=\beta=1$ given by HARDY ([2], Theorem 53).

§ 3. The principal theorems. We now proceed to prove the results outlined in § 1.

Theorem 1. *Let $\{p_n\}$ be defined as in (8) and let the (A, p_n) transform of $s=\{s_n\}$ be denoted by*

$$N_n(p;s)\equiv\frac{p_0s_n+p_1s_{n-1}+\cdots+p_ns_0}{P_n},\qquad (n=0,1,2,\ldots)\ ^3).$$

Also let $t=\{t_n\}$ be defined by (3) with the restriction (2) on $\{\lambda_n\}$. Then

$$N_n(p;s)\to l\quad \textit{implies}\quad N_n(p;t)\to l\ \textit{and conversely},$$

where (2) is required in its entirety for the converse part, but only in the form $\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n|<\infty$ for the first part.

Proof. Let the matrix A be defined by (7), the matrix D_p by (9), and the matrix P by

$$P=(p_{nk})\quad\text{where}\quad p_{nk}=\begin{cases}p_{n-k} & \text{for}\quad k\leqq n\\ 0 & \text{for}\quad k>n.\end{cases}$$

[3]) VUČKOVIĆ ([9], Th. 1) uses the superfluous extra conditions $p_n/P_n\to 0$, $P_n\to\infty$ in proving his special case of the converse part of Theorem 1.

If we write

$$u_n = N_n(p\,;s), \qquad v_n = N_n(p\,;t)$$

we get, from the definitions of P, D_p and Λ in (10), (9) and (7), the following matrix equations for the sequences u and v in terms of s and t respectively

$$(11) \qquad u = (D_p P)\,s = D_p P s, \qquad \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\Big) v = (D_p P)\Lambda s = D_p P \Lambda s.$$

Now, in our conclusion which is the equivalence of the statements $u_n \to l$ and $v_n \to l$ we may take $l = 0$. For, the matrices $D_p P$ and $D_p P \Lambda$ transform the constant sequence $\{l\}$ to $\{l\}$ and $\Big\{\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\Big) l\Big\}$ respectively, so that we can change $\{s_n\}$ to $\{s_n - l\}$ in (11) and give our conclusion as the equivalence of the relations $u_n \to 0$ and $v_n \to 0$.

From the definition of u in (11) we have

$$s = (D_p P)^{-1} u = P^{-1} D_p^{-1} u,$$

while it is easily verified that

$$P\Lambda = \Lambda P.$$

Hence, remembering that a product of lower-semi-matrices is associative, we get from the definition of v in (11):

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\Big) v = D_p P \Lambda P^{-1} D_p^{-1} u = D_p \Lambda P P^{-1} D_p^{-1} u = D_p \Lambda D_p^{-1} u.$$

From Lemma 3 it is now clear that $u_n \to 0$ implies $v_n \to 0$ and conversely. In the last-stated conclusion, the first part follows from the first part of Lemma 3 and the second (converse) part from the second part of Lemma 3. Hence the condition $\{\lambda_n\}$ used in each part of Theorem 1 is the same as the one used in the corresponding part of Lemma 3.

Theorem 2. *Let the power series*

$$A(x\,;s) \equiv (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

have radius of convergence 1. *Let* $t = \{t_n\}$ *be defined by* (3′), *with of course* $\{\lambda_n\}$ *satisfying the condition* $\sum \lambda_n \neq 0$. *Then*

$$A(x\,;s) \to l \quad (\text{as } x \to 1 - 0) \text{ implies } \quad A(x\,;t) \to l \qquad \textit{and conversely.}$$

This theorem is trivial[4]) and is included only for comparison with the next. The proof is evident from the relation

$$A(x\,;t) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_k x^k}{\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k} A(x\,;s).$$

[4]) The triviality is masked in Vučković's proof [9] of the case $k = 1$ of the converse part of Theorem 2.

Theorem 3. *Let the Borel transform of* $s=\{s_n\}$, *i.e.*,

$$B(x;s)\equiv e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}$$

exist for $x>0$. *Let* $t=\{t_n\}$ *be defined by* (3′) *with the restriction on* $\{\lambda_n\}$ *given in* (2). *Then*

$$B(x;s)\to l \quad (\text{as } x\to\infty) \quad \text{implies} \quad B(x;t)\to l$$

and conversely provided that $B(x;s)$ *is bounded, the first part of the statement being true even without the condition* (2).

Proof. By definition

$$B(x;t)=\frac{\lambda_0 B_0(x)+\lambda_1 B_1(x)+\cdots+\lambda_k B_k(x)}{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k} \tag{12}$$

where

$$\begin{cases} B_0(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\frac{x^n}{n!}=B(x;s), \\ B_r(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}s_{n-r}\frac{x^n}{n!}=e^{-x}\int_0^x e^y B_{r-1}(y)\,dy \qquad (r\geq 1). \end{cases} \tag{13}$$

From (13) we obtain

$$\varliminf_{x\to\infty}B_{r-1}(x)\leq\varliminf_{x\to\infty}B_r(x)\leq\varlimsup_{x\to\infty}B_{r-1}(x)$$

so that

$$\lim_{x\to\infty}B_r(x)=\lim_{x\to\infty}B_0(x) \tag{14}$$

if the righthand limit exists, and, in any case,

$$\varlimsup_{x\to\infty}|B_r(x)|\leq\varlimsup_{x\to\infty}|B_0(x)|. \tag{15}$$

It follows at once from (12) and (14) that $B(x;s)\to l$ implies $B(x;t)\to l$.

To prove that $B(x;t)\to l$ implies $B(x;s)\to l$ under the condition (2) and the condition of boundedness of $B(x;s)$, we argue as follows. We may suppose that $l=0$ since we may consider $\{s_n-l\}$ instead of $\{s_n\}$. We then have to prove that the assumption $\varlimsup_{x\to\infty}|B_0(x)|=L>0$ contradicts the hypothesis $\lim_{x\to\infty}B(x;t)=0$, under the condition (2) which is

$$|\lambda_0|-\sum_{r=1}^{k}|\lambda_r|=\delta>0.$$

Given $\varepsilon>0$, by (15) and the assumption that $\varlimsup_{x\to\infty}|B_0(x)|=L>0$ we have, for all sufficiently large x, say $x>x_0$,

$$|\lambda_r B_r(x)|\leq|\lambda_r|\cdot(L+\varepsilon), \tag{16}$$

while, for any infinity of $x > x_0$,

$$|\lambda_0 B_0(x)| > |\lambda_0|(L-\varepsilon). \tag{17}$$

If $\varepsilon = \delta L/2(|\lambda_0|+|\lambda_1|+\cdots+|\lambda_k|)$ we get from (12), (16) and (17), for an infinity of $x > x_0$,

$$\begin{aligned}|\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k||B(x;t)| &\geq ||\lambda_0 B_0(x)| - |\lambda_1 B_1(x)| - \cdots - |\lambda_k B_k(x)|| \\ &\geq |\lambda_0|(L-\varepsilon) - (|\lambda_1|+|\lambda_2|+\cdots+|\lambda_k|)(L+\varepsilon) \\ &= \delta L - \delta L/2 = \delta L/2 > 0.\end{aligned}$$

This contradicts the hypothesis $\lim_{x\to\infty} B(x;t) = 0$ and so

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|B_0(x)| = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{x\to\infty} B_0(x) = 0,$$

as we wished to prove.

Remarks on Theorem 3. Condition (2) and the boundedness of $B(x;s)$ are *sufficient*, but not *necessary*, for the converse half of the conclusions of Theorem 3. For instance, Szász ([8], p. 81) asserts without proof the converse half in the case $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$. Again, by using Lemma 6, the converse half of Theorem 3 can be established for $k = 1$ under the single condition

$$\text{either } |\operatorname{Re}\lambda_0| > |\operatorname{Re}\lambda_1| \quad \text{or} \quad |\operatorname{Im}\lambda_0| > |\operatorname{Im}\lambda_1|.$$

For, when $k = 1$ we get from (12) and (13):

$$\left\{\begin{aligned}(\lambda_0+\lambda_1)B(x;t) &= \lambda_0 B_0(x) + \lambda_1 B_1(x) \\ &= \lambda_0[B_1(x) + B_1'(x)] + \lambda_1 B_1(x) \\ &= (\lambda_0+\lambda_1)B_1(x) + \lambda_0 B_1'(x).\end{aligned}\right. \tag{18}$$

If $|\operatorname{Re}\lambda_0| > |\operatorname{Re}\lambda_1|$ then $\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda_1)$ and $\operatorname{Re}\lambda_0$ have the same sign, a similar statement being true of imaginary parts. Hence, considering either

$$\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda_1)\cdot B(x;t) \quad \text{or} \quad \operatorname{Im}(\lambda_0+\lambda_1)\cdot B(x;t)$$

and appealing to Lemma 6, we see that $B(x;t)\to 0$ implies $B_1(x)\to 0$ and hence $B_0(x)\to 0$ from (18).

Theorem 4. *Let $B(x;s)$, defined as in Theorem 3, exist for $x > 0$. Let $t = \{t_n\}$ be defined by*

$$t_n = \frac{\lambda_0 s_n + \lambda_1 s_{n+1}}{\lambda_0+\lambda_1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

i.e., t is the transform of s by the matrix which is the transpose of the matrix defining the transform by $(\mathscr{Z}_1)$. Then, provided that either $\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda_1)$ and $\operatorname{Re}\lambda_1$ or $\operatorname{Im}(\lambda_0+\lambda_1)$ and $\operatorname{Im}\lambda_1$ have the same sign,

$$B(x;t)\to l \quad \textit{implies} \quad B(x;s)\to l$$

but not conversely.

Proof. As in Theorem 3, it is enough to consider the case $l=0$. We have

$$\begin{aligned}(\lambda_0+\lambda_1)\,B(x;t) &= e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 s_n+\lambda_1 s_{n+1})\,\frac{x^n}{n!}\\ &= \lambda_0 B(x;s)+\lambda_1[B(x;s)+B'(x;s)]\\ &= (\lambda_0+\lambda_1)\,B(x;s)+\lambda_1 B'(x;s).\end{aligned}$$

It follows from Lemma 6 that $B(x;t)\to 0$ implies $B(x;s)\to 0$ with the given restriction on λ_0, λ_1.

The example due to Szász ([8], p. 81) in which $\lambda_0=\lambda_1=1$ shows that the converse is not true.

Theorem 5. *Let the transform $t=\{t_n\}$ of $s=\{s_n\}$ be defined by* (5) *and let q satisfy the inequality* (6). *Let $(\mathscr{T}_1)s$ be either the Abel transform $(\mathscr{A})s$ or the Borel transform $(\mathscr{B})s$, or a regular Hausdorff transform $(\mathscr{H})s$ of the sequence s. Then*

$(\mathscr{T}_1)$-summability of s implies that of t to the same value, and conversely, where the converse part alone requires the restriction on q.

Proof. When $(\mathscr{T}_1)s$ is either the Abel transform of s, or the Borel transform of s, the conclusion of the theorem follows from Lemmas 2, 4. When $(\mathscr{T}_1)s$ is a regular Hausdorff transform of s, the same conclusion follows from Lemmas 2, 5.

Remark on Theorem 5. In Andersen's theorem referred to at the outset, H is the matrix of the $(C,1)$ transformation and $(\mathscr{H})s$ is the (C,k) transform of s. In this case the restriction on q can be relaxed to $\operatorname{Re} q>-1$. For, if C_1 and C_k denote the matrices of the $(C,1)$ and (C,k) transformations, it follows from $C_k\frac{I+qC_1}{1+q}s\to l$ that $\frac{I+qC_1}{1+q}C_k s\to l$, since Hausdorff transformations are commutable. It is now clear from Mercer's original theorem that $C_k s\to l$ if $\operatorname{Re} q>-1$.

I am thankful to Prof. C. T. Rajagopal for helpful discussions and suggestions in the course of the preparation of this note.

References

[1] Cooke, R. G.: Infinite matrices and sequence spaces. London 1950. — [2] Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [3] Hille, E.: Functional analysis and semigroups. New York 1948. — [4] Parameswaran, M. R.: Some converse theorems on summability. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **36**, 363—369 (1952). — [5] Polya, G., u. G. Szego: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Berlin 1954. — [6] Rajagopal, C. T.: Theorems on the product of two summability methods, with applications. J. Indian Math. Soc. **18**, 89—105 (1954). — [7] Ramanujan, M. S.: On the product of Abel and Quasi-Hausdorff transformations. Math. Z. **64**, 442—447 (1956). — [8] Szász, O.: On the product of two summability methods. Ann. Soc. Polonaise Math. **24**, 75—84 (1952). — [9] Vučković, V.: Deux theoremes de type Mercerien. Publ. Inst. Math., Beograd **8**, 53—58 (1955).

Ramanujan Institute of Mathematics, Madras, India

(Eingegangen am 12. Januar 1957)

Stallmann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 27—76 (1957)

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. II*

Von

Friedemann Stallmann

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift Bd. 60, S. 187—212 (1954) erschienenen ersten Mitteilung. Die dort entwickelten allgemeinen Methoden werden hier auf die Spezialfälle der Riemannschen (hypergeometrischen) und der Whittakerschen (konfluenten hypergeometrischen) Differentialgleichung angewendet. Für die Untersuchungen war zunächst der Gesichtspunkt maßgebend, daß diese Differentialgleichungen nach einer geeigneten Liouville-Transformation als Hilfsdifferentialgleichungen für verfeinerte asymptotische Abschätzungen in Betracht kommen, wie wir es am Schluß der ersten Mitteilung bereits erwähnten. Dabei interessieren diejenigen Lösungen der Hilfsdifferentialgleichungen, die sich hinreichend weit von den Singularitäten entfernt wie die Exponentialfunktion verhalten. Es gilt die Zusammenhänge zwischen diesen und den bekannten durch hypergeometrische Reihen darstellbaren kanonischen Lösungen herzustellen, sowie die Relationen zwischen den verschiedenen Hilfsfunktionen zu berechnen. Wegen der großen Bedeutung, die diese Beziehungen für die verfeinerte Untersuchung der Laméschen und verwandter Differentialgleichungen[1]) haben, schien es mir richtig, diese so vollständig wie möglich anzugeben.

Gleichzeitig — gewissermaßen als ein Nebenergebnis — erhielten wir aus diesen Untersuchungen asymptotische Abschätzungen der hypergeometrischen Funktionen und Reihen bei großen Parameterwerten. Die hier verwendeten Methoden, bei denen die Gesichtspunkte der konformen Abbildung im Vordergrund stehen, gestatten eine einheitliche Behandlung aller vorkommenden Fälle, so daß die Ergebnisse bei aller Vollständigkeit sehr übersichtlich bleiben. Hierin liegt meines Erachtens der Hauptunterschied gegenüber der bisher über diesen Gegenstand veröffentlichten Literatur[2]), bei der jeweils nur Spezialfälle behandelt werden.

---

* Der vorliegende Teil II bildet zusammen mit dem in Kürze erscheinenden Teil III die Habilitationsschrift des Verfassers, die von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule Gießen angenommen wurde.

[1]) Untersuchungen der Laméschen Differentialgleichung auf Grund der hier abgeleiteten Beziehungen bringt der dritte Teil dieser Arbeit. Entsprechende Untersuchungen der Matthieuschen und Sphäroidfunktionen werden zur Zeit vom Verfasser durchgeführt und sollen ebenfalls in absehbarer Zeit publiziert werden. Vgl. auch Stallmann [7].

[2]) Vgl. hierzu etwa Bateman [1] Bd. 1, 75—78 und 277—282 und die dort angegebene Literatur.

Zur Darstellung ist noch zu sagen, daß alle Bezeichnungen ohne Änderung aus der ersten Mitteilung übernommen wurden. Die dort begonnene Numerierung der Paragraphen wird hier fortgesetzt. Bei Hinweisen beziehen sich also § 1 bis § 3 auf die erste, § 5 bis § 10 auf die vorliegende Mitteilung und entsprechendes gilt für die zitierten Formeln.

§ 4. Die Riemannsche Differentialgleichung. Allgemeines

4.1. Wir schreiben die Riemannsche Differentialgleichung[3]) nach unseren Festsetzungen in 1.2 in der Form:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-\delta_1^2}{x^2} + \frac{1-\delta_1^2}{(x-1)^2} - \frac{1+\delta_\infty^2-\delta_0^2-\delta_1^2}{x(x-1)}\right]. \tag{4.1.1}$$

Der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung bildet die obere Halbebene auf ein Kreisbogendreieck ab. Dabei gehen die singulären Stellen $x=0,\ 1,\ \infty$ in die Ecken des Dreiecks über, die zugehörigen Winkel haben die Größe $\pi\delta_0$, $\pi\delta_1$, $\pi\delta_\infty$. Die δ_ν seien positiv reell oder positiv imaginär, ganzzahlig reelleWerte seien jedoch ausgeschlossen. Diese erfordern eine gesonderte Untersuchung, die hier nicht durchgeführt werden soll. Sie führt im allgemeinen zu den gleichen Ergebnissen wie bei unganzen δ_ν, jedenfalls immer dann, wenn die betrachteten Größen auch für ganze δ_ν sinnvoll bleiben.

Die kanonischen Lösungen zu den Stellen der Bestimmtheit $x=0,\ 1,\ \infty$ lassen sich bekanntlich durch hypergeometrische Reihen ausdrücken. Die hierdurch festgelegten Funktionselemente betrachten wir zunächst auf der reellen Achse; so seien im Intervall $(0,\ 1)$ als $y^{(1),(2)}_{(0,1)}$, $y^{(1),(2)}_{(1,0)}$ die folgenden Lösungen von (4.1.1) definiert:

$$\left\{\begin{aligned}
y^{(1)}_{(0,1)}(x) &= x^{\frac{1+\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1+\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1+\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1+\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1+\delta_0; x\right) \\
y^{(2)}_{(0,1)}(x) &= x^{\frac{1-\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1+\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1-\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1-\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1-\delta_0; x\right) \\
y^{(1)}_{(1,0)}(x) &= x^{\frac{1+\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1+\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1+\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1+\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1+\delta_1; 1-x\right) \\
y^{(2)}_{(1,0)}(x) &= x^{\frac{1+\delta_0}{2}}(1-x)^{\frac{1-\delta_1}{2}} \times \\
&\quad \times F\left(\frac{1+\delta_0-\delta_1+\delta_\infty}{2}, \frac{1+\delta_0-\delta_1-\delta_\infty}{2}, 1-\delta_1; 1-x\right).
\end{aligned}\right. \tag{4.1.2}$$

[3]) KLEIN [3], insbesondere S. 23—53.

Für die auftretenden Potenzen seien die Hauptwerte gewählt, es sei also

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}, \qquad (1-x)^{\beta} = e^{\beta \log (1-x)}$$

mit reellem Logarithmus.

Die in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ gültigen Lösungen erhalten wir in bekannter Weise durch Transformation der Riemannschen Differentialgleichung in sich[4]), wodurch die singulären Stellen $x = 0, 1, \infty$ und dementsprechend auch die $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ vertauscht werden. Wir definieren so im Intervall $(-\infty, 0)$ als

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} y^{(1)\,(2)}_{(-\infty,\,0)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = (1-x)\, y^{(1)\,(2)}_{(0,\,1)}\left(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1; \dfrac{1}{1-x}\right) \\ y^{(1)\,(2)}_{(0,\,-\infty)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = (1-x)\, y^{(1)\,(2)}_{(1,\,0)}\left(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1; \dfrac{1}{1-x}\right) \end{cases}$$

und im Intervall $(1, \infty)$ als

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} y^{(1)\,(2)}_{(1,\,\infty)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = x\, y^{(1)\,(2)}_{(0,\,1)}\left(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0; \dfrac{x-1}{x}\right) \\ y^{(1)\,(2)}_{(\infty,\,1)}(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty; x) = x\, y^{(1)\,(2)}_{(1,\,0)}\left(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0; \dfrac{x-1}{x}\right), \end{cases}$$

die derart transformierten Lösungen (4.1.2). Die den y beigefügten $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ sollen dabei die Art der Permutation deutlich machen; wir werden sie im folgenden wieder fortlassen.

4.2. Relationen. Zwischen den Lösungen (4.1.2) besteht die Relation:

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} y^{(1)}_{(0,\,1)} = G_0(-\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\, y^{(1)}_{(1,\,0)} + G_0(\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\, y^{(2)}_{(1,\,0)} \\ y^{(2)}_{(0,\,1)} = G_0(-\delta_1, -\delta_0, \delta_\infty)\, y^{(1)}_{(1,\,0)} + G_0(\delta_1, -\delta_0, \delta_\infty)\, y^{(2)}_{(1,\,0)}. \end{cases}$$

Dabei ist $G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)$ der folgende Ausdruck:

$$G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\beta)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)}.$$

Die zwischen den anderen Lösungspaaren gültigen Relationen ergeben sich hieraus wie in (4.1.3) und (4.1.4) durch Permutation der δ_ν.

Weiter haben wir zu betrachten die Umlaufsrelationen der Lösungen bei geschlossenen Umläufen um die singulären Stellen. Wir gehen davon aus, daß die in (4.1.2) bis (4.1.4) definierten Lösungen aus ihren Definitionsintervallen heraus überallhin in die obere und in die untere Halbebene analytisch fortgesetzt werden können. Der so in der oberen Halbebene erklärte und dort eindeutige Funktionszweig sei weiterhin mit $y^{(i)}_{(\alpha,\,\beta)}$, der in der unteren Halbebene erklärte zum Unterschied davon mit $\tilde{y}^{(i)}_{(\alpha,\,\beta)}$ bezeichnet. Die Umlaufsrelationen lassen sich dann darstellen als Relationen zwischen den $y^{(i)}_{(\alpha,\,\beta)}$ und $\tilde{y}^{(i)}_{(\alpha,\,\beta)}$ auf gewissen reellen Intervallen. So schreibt sich die Umlaufsrelation für die $y^{(1)}_{(0,\,1)}$, $y^{(2)}_{(0,\,1)}$ bei einmaligem Umlauf in mathematisch negativem

[4]) Klein [3] S. 43—49.

Sinne um $x=1$ als folgende Relation, gültig auf dem Intervall $(1, \infty)$:

$$(4.2.2)\quad \begin{cases} y^{(1)}_{(0,1)} = \dfrac{i}{\sin \pi \delta_0}\,(e^{i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{y}^{(1)}_{(0,1)} - \\ \qquad - 2\pi i\, H_0(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\,\tilde{y}^{(2)}_{(0,1)} \\ y^{(2)}_{(0,1)} = -2\pi i\, H_0(-\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\,\tilde{y}^{(1)}_{(0,1)} - \\ \qquad - \dfrac{i}{\sin\pi\delta_0}\,(e^{-i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{y}^{(2)}_{(0,1)}. \end{cases}$$

Dabei ist

$$H_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)}.$$

Die entsprechenden Umlaufsrelationen für die anderen Lösungen ergeben sich hieraus wieder durch Permutation der δ_ν.

Schließlich notieren wir noch die in der oberen Halbebene gültigen Beziehungen

$$(4.2.3)\quad \begin{cases} y^{(1)}_{(-\infty,0)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(1-\delta_\infty)}\,y^{(1)}_{(\infty,1)}, & y^{(2)}_{(-\infty,0)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(1+\delta_\infty)}\,y^{(2)}_{(\infty,1)}, \\ y^{(1)}_{(0,1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1+\delta_0)}\,y^{(1)}_{(0,-\infty)}, & y^{(2)}_{(0,1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1-\delta_0)}\,y^{(2)}_{(0,-\infty)}, \\ y^{(1)}_{(1,\infty)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1+\delta_1)}\,y^{(1)}_{(1,0)}, & y^{(2)}_{(1,\infty)} = e^{\frac{i\pi}{2}(1-\delta_1)}\,y^{(2)}_{(1,0)}. \end{cases}$$

4.3. Liouville-Transformationen. Gemäß 2.1 schreiben wir die Differentialgleichung (4.1.1) in der Form

$$\frac{y''}{y} = r(x) + \varrho^2\varphi(x)$$

und üben darauf die Liouville-Transformation aus:

$$\xi(x) = \varrho\int_{x_0}^{x} \sqrt{q(x)}\,dx, \qquad u(\xi) = \sqrt[4]{q(x)}\,y(x).$$

Wegen der in 2.2 aufgeführten Bedingungen kommen für $\varrho^2\varphi(x)$ nur eine endliche Zahl von rationalen Funktionen in Betracht. Darüber hinaus werden wir die Funktionen $\varrho^2\varphi(x)$ als nicht voneinander verschieden ansehen, die durch bloße Vertauschung der δ_ν und der dazugehörigen linearen Transformation der x-Ebene auseinander hervorgehen (vgl. 4.1 Fußnote 3). Es sind dann nur die folgenden drei Fälle zu untersuchen:

$$(4.3.1)\quad \varrho^2\varphi(x) = \frac{\delta_\infty^2}{4x(x-1)},$$

$$(4.3.2)\quad \varrho^2\varphi(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{\delta_1^2}{(x-1)^2} + \frac{\delta_\infty^2-\delta_1^2}{x(x-1)}\right],$$

$$(4.3.3)\quad \varrho^2\varphi(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{\delta_0^2}{x^2} + \frac{\delta_1^2}{(x-1)^2} + \frac{\delta_\infty^2-\delta_0^2-\delta_1^2}{x(x-1)}\right].$$

Die Größe ϱ ist dabei beliebig wählbar, sie hat nur die Bedeutung eines Maßes für die Güte der Näherung durch die asymptotische Integration. Dies ist so zu verstehen, daß bei festem $q(x)$ die Näherung um so besser wird, je größer ϱ ist. So ist im Falle der Transformation (4.3.1) die Näherung um so besser, je größer $|\delta_\infty|$ ist, im Falle (4.3.2) müssen $|\delta_\infty|$ und $|\delta_1|$ groß sein und im Falle (4.3.3) $|\delta_\infty|$, $|\delta_1|$ und $|\delta_0|$. In den beiden letzten Fällen sind dabei nur solche Näherungen untereinander vergleichbar, bei denen die betreffenden δ_ν im festen Verhältnis zueinander stehen.

Die aus diesen Liouville-Transformationen sich ergebenden Differentialgleichungen werden in den folgenden Paragraphen genauer untersucht. Einige Ergänzungen zu unseren Ausführungen in § 2 und § 3 der ersten Mitteilung seien vorangestellt.

4.4. Zunächst einige Festsetzungen, welche die *Eindeutigkeit* der durch asymptotische Integration gewonnenen Lösungen gewährleisten. Gemäß 3.6 werde das vorgelegte ξ-Polygon in gewisse Teilbereiche, nämlich Rechtecke R_ν, Halbstreifen S_ν und Quadranten Q_ν eingeteilt. Diese Teilbereiche haben nach Voraussetzung in höchstens einer Ecke eine Singularität der Differentialgleichung. Für das Folgende können wir annehmen, daß genau eine Ecke des Teilbereichs als singuläre Ecke ξ_0 ausgezeichnet ist[5]). Sei

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right)^2 Q(\xi) = -\frac{1-(2m)^2}{4}, \tag{4.4.1}$$

dann möge die Größe $m = m$ positiv reell oder positiv imaginär — als Index der singulären Stelle ξ_0 bezeichnet werden.

Wir wählen in dem betrachteten Teilbereich die Differentialgleichung

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1-(2m)^2}{4}\,\frac{1}{(\xi-\xi_0)^2} \tag{4.4.2}$$

als Hilfsdifferentialgleichung und insbesondere als Hilfsfunktionen die schon in (3.8) betrachteten Lösungen der Differentialgleichung (4.4.2):

$$\begin{cases} v_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi(\xi-\xi_0)}{2}}\, e^{\frac{i\pi m}{2}} H_m^{(1)}\left(e^{-\frac{i\pi}{2}}(\xi-\xi_0)\right) = e^{\xi-\xi_0}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi-\xi_0}\right)\right), \\ \qquad 0 \leqq \arg(\xi-\xi_0) \leqq 2\pi, \\ v_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi(\xi-\xi_0)}{2}}\, e^{i\pi\frac{m+1}{2}} H_m^{(1)}\left(e^{\frac{i\pi}{2}}(\xi-\xi_0)\right) = e^{-(\xi-\xi_0)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi-\xi_0}\right)\right), \\ \qquad -\pi \leqq \arg(\xi-\xi_0) \leqq +\pi, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

($H_m^{(1)}$ Hankelfunktion m-ter Ordnung).

Diese Funktionen verhalten sich also in dem betrachteten Teilbereich hinreichend weit von der Singularität ξ_0 entfernt wie $e^{\pm(\xi-\xi_0)}$.

[5]) Es ist nicht unbedingt erforderlich, daß ξ_0 wirklich *singuläre* Stelle der Differentialgleichung ist; es läßt sich ja jede reguläre Stelle als singuläre mit dem Index $m = \frac{1}{2}$ auffassen. Die Stelle ξ_0 muß nur irgendwie vor den übrigen — regulären — Ecken ausgezeichnet sein, was z.B. dann der Fall ist, wenn ξ_0 nur bei speziellen Parameterwerten reguläre, sonst aber singuläre Stelle der Differentialgleichung ist.

Bezüglich des Anfangspunktes für die asymptotische Integration mußten wir in 3.1 voraussetzen, daß der zu $v_1(\xi)$ gehörige Anfangspunkt $\xi_1^{(1)}$ auf dem linken Rand, der zu $v_2(\xi)$ gehörige Anfangspunkt $\xi_1^{(2)}$ auf dem rechten Rand des Teilbereichs liegt. Zusätzlich wollen wir noch fordern, daß die Anfangspunkte möglichst weit von der singulären Stelle entfernt liegen; hierdurch ist die Lage der Anfangspunkte eindeutig bestimmt. Die asymptotische Integration ergibt dann wie in (3.9) im ganzen Teilbereich gültige Abschätzungen der Lösungen von der Form

$$(4.4.4) \qquad u_1(\xi) = v_1(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \qquad u_2(\xi) = v_2(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).$$

Für die Anfangspunkte $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}$ gilt genauer:

$$(4.4.5) \qquad \begin{cases} u_1(\xi_1^{(1)}) = v_1(\xi_1^{(1)}), & u_2(\xi_1^{(2)}) = v_2(\xi_1^{(2)}), \\ u_1'(\xi_1^{(1)}) = v_1'(\xi_1^{(1)}), & u_2'(\xi_2^{(2)}) = v_2'(\xi_1^{(2)}); \end{cases}$$

durch diese Anfangsbedingungen sind die Lösungen *eindeutig bestimmt.*

Eine zusätzliche Überlegung erfordert noch der Fall, daß der Anfangspunkt nach den eben angeführten Bedingungen im Unendlichen liegt. Diese Lage des Anfangspunktes ist zulässig, da nach 2.12 die in (2.19) betrachteten Integrale dort konvergieren. Nur die Anfangsbedingungen (4.4.5) werden dort sinnlos, weil die $v_{1,2}(\xi)$ für $\xi = \infty$ wesentlich singulär sind. An ihre Stelle tritt eine asymptotische Abschätzung von $u(\xi)$ für $\xi \to \infty$ bei Annäherung längs des Integrationsweges von der Form:

$$(4.4.6) \qquad u(\xi) = v(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) = e^{\pm(\xi - \xi_0)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right).$$

Diese Abschätzung läßt sich leicht nach den Ausführungen in 2.12 aus der Abschätzung (2.41) ableiten. In den hier betrachteten Fällen legt die Abschätzung (4.5.3) die Lösung $u(\xi)$ ebenfalls eindeutig fest.

4.5. Wir verabreden noch folgende Bezeichnungsweise: Die Lösungen der transformierten Riemannschen Differentialgleichung seien — im Hinblick auf eine mögliche Verwendung dieser Funktionen als Hilfsfunktionen — mit $v(\xi)$ bezeichnet. Genauer sei $v_\nu^{(1)}(\xi), v_\nu^{(2)}(\xi)$ ein Paar von Lösungen, die im ν-ten Teilbereich des ξ-Polygons R_ν, S_ν oder Q_ν mit den in (4.4.3) definierten Hilfsfunktionen $v_1(\xi), v_2(\xi)$ durch asymptotische Integration gewonnen wurden. Wie erwähnt, sei dabei in jedem Falle eine Ecke des Teilbereichs als singuläre Ecke ausgezeichnet und die Anfangspunkte $\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}$ mögen den eben besprochenen Bedingungen genügen.

Das ξ-Polygon ist definitionsgemäß das Abbild der oberen x-Halbebene bei Abbildung durch $\xi(x)$. Die untere Halbebene wird durch $\xi(x)$, wenn wir diese Funktion in irgendwie vorgegebener Weise analytisch dorthin fortsetzen, auf ein Polygon abgebildet, das aus dem ursprünglichen durch Spiegelung an einer Geraden parallel zur reellen oder imaginären Achse hervorgeht. Bei dieser Spiegelung — die dem Übergang vom Punkt x zum konjugiert

komplexen $\bar{x}$ in der x-Ebene entspricht — möge ein Punkt ξ in den Punkt $\tilde{\xi}$, die Teilbereiche R_ν, S_ν, Q_ν in die Teilbereiche $\tilde{R}_\nu$, $\tilde{S}_\nu$, $\tilde{Q}_\nu$ übergehen. Die in diesen neuen Teilbereichen durch asymptotische Integration gewonnenen Paare von Lösungen mögen entsprechend mit $\tilde{v}_\nu^{(1)}(\xi)$, $\tilde{v}_\nu^{(2)}(\xi)$ bezeichnet werden in Analogie zu den in 4.2 betrachteten $\tilde{y}_{(\alpha,\beta)}^{(i)}(x)$.

4.6. Relationen. Wir wollen hier noch — in Ergänzung der Ausführungen in 3.6 — die Relationen abschätzen, die zwischen den in benachbarten Teilbereichen durch asymptotische Integration gewonnenen Lösungen bestehen. Die benachbarten Teilbereiche mögen die Rechtecke R_1 und R_2 sein — die

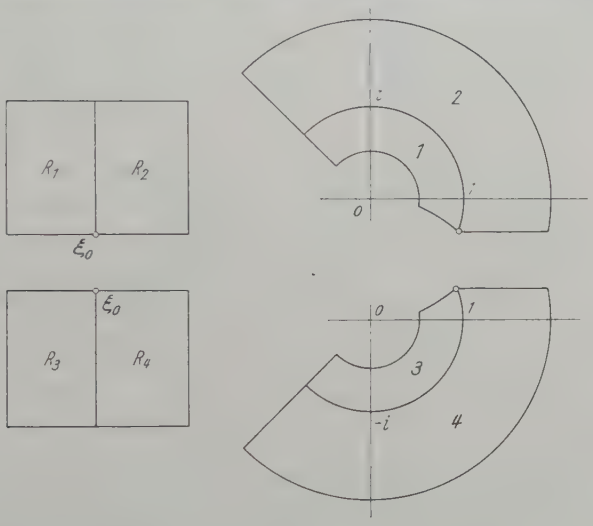

Fig. 1

Überlegungen gelten dann in gleicher Weise auch für Halbstreifen und Quadranten. $v_1^{(1)}, v_1^{(2)}$ und $v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$ seien die nach 4.5 in den Teilbereichen definierten Lösungen. $\xi_0^{(1)}$ sei die zu R_1, $\xi_0^{(2)}$ die zu R_2 gehörige singuläre Stelle.

Liegen die Stellen $\xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}$ getrennt, so gilt für die Relationen zwischen den Lösungen die folgende Abschätzung[6]:

$$\text{(4.6.1)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = e^{\xi_0^{(2)} - \xi_0^{(1)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(1)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(1)} + e^{\xi_0^{(1)} - \xi_0^{(2)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Die gleiche Relation gilt auch, wenn $\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)}$ ist, und die Teilrechtecke längs einer Kante parallel zur imaginären ξ-Achse zusammenhängen. Es ist

[6]) Es ist hier vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt $\frac{\xi_0^{(1)} + \xi_0^{(2)}}{2}$ auf der gemeinsamen Kante liegt, für die nach 3.6 die Relationen berechnet werden. (Vgl. auch STALLMANN [6] S. 14, insbesondere die Formel (29).) Dies ist in der Regel der Fall oder läßt sich doch ohne Schwierigkeiten erreichen.

dann genauer:

$$\text{(4.6.2)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(1)} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) v_2^{(1)} + \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Ist $\xi_0^{(1)} = \xi_0^{(2)}$ eine singuläre Stelle mit dem Index m und hängen die Teilbereiche längs einer Kante zusammen, die parallel zur reellen ξ-Achse verläuft, so ist zu unterscheiden, ob sich die gemeinsame Kante von der singulären

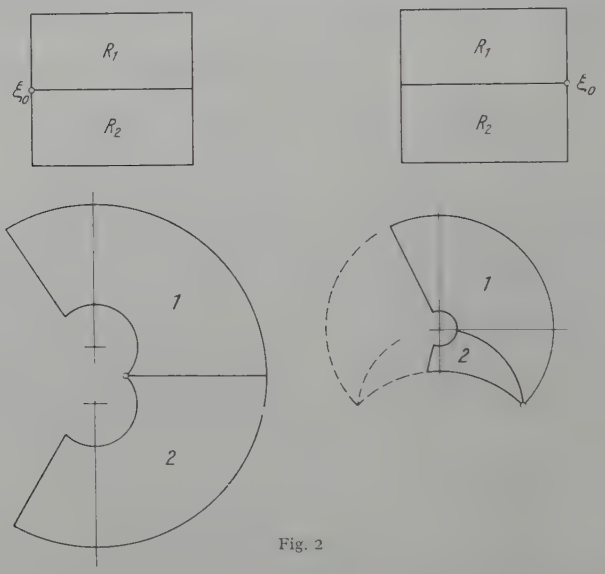

Fig. 2

Stelle aus nach rechts oder nach links erstreckt. Im ersten Fall wird:

$$\text{(4.6.3)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(1)} - \left(2i \cos \pi m + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = O\left(\varrho^{\gamma}\right) v_2^{(1)} + \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Im zweiten Fall gilt:

$$\text{(4.6.4)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(1)} + \left(O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}; \\ v_1^{(2)} = \left(2i \cos \pi m + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(1)} + \left(1 + O\left(\varrho^{\gamma}\right)\right) v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Dabei soll in jedem Fall R_1 oben, R_2 unten liegen. Die Größe γ mit $-1 \leqq \gamma < 0$ bestimmt sich aus (2.40).

Für die Zusammensetzung des Kreisbogenpolygons aus Teilpolygonen gemäß 3.6 ist die *geometrische Deutung* der Relationen (4.6.1) bis (4.6.4) wichtig. Nach 3.2 werden die Teilrechtecke durch $\eta(\xi)$ näherungsweise auf gewisse Kreisbogenvierecke abgebildet. Betrachtet man speziell den Quotienten

$$\eta_\nu(\xi) = \frac{v_\nu^{(1)}(\xi)}{v_\nu^{(2)}(\xi)}$$

der in 4.4 festgelegten Lösungen, so erhält man — je nach Lage der singulären Ecke eines der in Fig. 1 dargestellten Vierecke.

Geometrisch bedeutet nun die Relation (4.6.1) eine Drehstreckung. Diese muß so beschaffen sein, daß sich das eine Viereck in richtiger Lage an das andere anschließt.

Die Relationen (4.6.3) und (4.6.4) sind der analytische Ausdruck des Schwarzschen Spiegelungsprinzips. Die gemeinsame Kante geht durch $\eta_1(\xi)$ näherungsweise über in die Gerade $\Im(\eta_1) = \cos \pi m$ bzw. den Kreis $|2\eta_1 \cos \pi m + i| = 1$. Die Relationen (4.6.3) und (4.6.4) sagen dann aus, daß die benachbarten Kreisbogenvierecke näherungsweise spiegelbildlich bezüglich dieser Geraden bzw. dieses Kreises liegen (s. Fig. 2).

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich der Aufbau des Kreisbogenpolygons aus den Teilpolygonen ohne Rechnung allein mit elementaren geometrischen Konstruktionen durchführen.

§ 5. Die Liouville-Transformation (4.3.1)

5.1. Allgemeines. Bei Anwendung dieser Transformation müssen wir voraussetzen, daß δ_0^2 und $\delta_1^2 \leqq \frac{1}{4}$ ist. Im übrigen sind, wie erwähnt, die Näherungen um so besser, je größer $|\delta_\infty|$ ist.

Wir wählen als untere Grenze im Integral $\xi(x)$ die Stelle $x_0 = 1$; ausgewertet ergibt das:

$$(5.1.1) \qquad \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2} \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \frac{\delta_\infty}{2} \log\left(2x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)}\right).$$

Wir setzen fest, daß im Intervall $(1, \infty)$ der reellen x-Achse $\sqrt{x(x-1)}$ positiv reell sein soll; der Logarithmus auf der rechten Seite von (5.1.1) kann dann dort ebenfalls positiv reell gewählt werden.

Die obere x-Halbebene wird durch $\xi(x)$ auf einen Halbstreifen abgebildet, und zwar nach unseren Festsetzungen bei reellem δ_∞ auf

$$\Re(\xi) \geqq 0, \qquad 0 \leqq \Im(\xi) \leqq \frac{\pi \delta_\infty}{2}$$

und bei imaginärem δ_∞ auf

$$-\frac{\pi |\delta_\infty|}{2} \leqq \Re(\xi) \leqq 0, \qquad \Im(\xi) \geqq 0.$$

Strebt $x \to \infty$ in der oberen Halbebene, so wird

$$(5.1.2) \qquad \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\left(\log x + \log 4 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Die Differentialgleichung (4.1.1) geht bei dieser Transformation über in[7])

$$(5.1.3) \qquad \frac{v''}{v} = 1 + \frac{1 - (2\delta_0)^2}{4\delta_\infty^2 \operatorname{Cof}^2 \frac{\xi}{\delta_\infty}} - \frac{1 - (2\delta_1)^2}{4\delta_\infty^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{\xi}{\delta_\infty}}.$$

[7]) Darbouxsche Differentialgleichung, vgl. v. Koppenfels [4].

Auf den betrachteten Halbstreifen hat diese Differentialgleichung singuläre Stellen bei $\xi = 0$ mit dem Index δ_1 und bei $\xi = \frac{i\pi\delta_\infty}{2}$ mit dem Index δ_0, die den singulären Stellen $x = 1$ und $x = 0$ der ursprünglichen Differentialgleichung (4.1.1) entsprechen. Für die asymptotische Integration teilen wir den Halbstreifen in zwei Teilhalbstreifen S_1 und S_2 auf, so daß die Stelle $\xi = \frac{i\pi\delta_\infty}{2}$ auf S_1, die Stelle $\xi = 0$ auf S_2 liegt (vgl. Fig. 3 und 4 in den folgenden Abschnitten). Für die weitere Untersuchung müssen wir unterscheiden, ob δ_∞ reell oder imaginär ist.

5.2. δ_∞ reell. Nach unseren Festsetzungen in 4.6 lassen sich durch asymptotische Integration in S_1 die Lösungen $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ und in S_2 die Lösungen $v_2^{(1)}$, $v_2^{(2)}$ der Differentialgleichung (5.1.3) definieren. Die zu $v_1^{(2)}$ und $v_2^{(2)}$ gehörigen Anfangspunkte liegen nach 4.5 im Unendlichen, und es gilt wegen (4.4.6) [8]:

$$\text{(5.2.1)} \qquad \begin{cases} v_1^{(2)} = e^{-\left(\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \\ v_2^{(2)} = e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\text{(5.2.2)} \qquad v_2^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}} v_1^{(2)}.$$

Die Abschätzungen (5.2.1) erlauben es, die im ξ-Polygon definierten Lösungen $v_k^{(i)}$ mit den kanonischen Lösungen (4.1.2) bis (4.1.4) zu vergleichen. Zusammen mit (5.1.2) ergibt sich nämlich hieraus das Verhalten der $v_k^{(i)}$ für $x \to \infty$. Wegen

$$v(\xi) = [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y(x)$$

muß dann etwa sein:

$$\text{(5.2.3)} \qquad v_1^{(2)}(\xi) = 4^{-\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(1)}_{(-\infty,0)}(x).$$

Damit haben wir eine in S_1 gültige Abschätzung von $y^{(1)}_{(-\infty,0)}(x)$ für große δ_∞ gewonnen, die sich wegen (5.2.2) auf das ganze ξ-Polygon bzw. die ganze obere x-Halbebene analytisch fortsetzen läßt.

Eine entsprechende Abschätzung für $y^{(2)}_{(-\infty,0)}$ läßt sich nicht so einfach gewinnen. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, daß diese kanonischen Lösungen für ganze δ_∞ sinnlos werden [9]) und logarithmische Glieder auftreten. Diese Schwierigkeiten lassen sich überwinden bei Betrachtung der analytischen Fortsetzung aus der unteren x-Halbebene.

[8]) Genauer müßte es heißen

$$v_1^{(2)} = e^{-\left(\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}\right)}\left(1 + O\left(e^{-\left|\frac{2\xi}{\delta_\infty}\right|}\right)\right) \ldots,$$

was sich bei sorgfältiger Abschätzung mit der Exponentialfunktion als Hilfsfunktion leicht nachweisen läßt. Analoges gilt für alle derartigen Abschätzungen im Halbstreifen, was ja auch mit den kanonischen Reihenentwicklungen übereinstimmt.

[9]) Es ist klar, daß (5.2.3) auch für ganze δ_∞ gilt.

Setzt man $\xi(x)$ über das Intervall $(0, 1)$ hinweg in die untere x-Halbebene fort, so wird diese auf den Halbstreifen abgebildet, der den ursprünglichen zu einem vollen Streifen ergänzt (vgl. Fig. 3). Wie in 4.5 besprochen, werde dieser Halbstreifen in die Teilhalbstreifen $\widetilde{S}_1$ und $\widetilde{S}_2$ eingeteilt, und in ihnen durch asymptotische Integration die Lösungen $\tilde{v}_1^{(1)}$, $\tilde{v}_1^{(2)}$ und $\tilde{v}_2^{(1)}$, $\tilde{v}_2^{(2)}$ definiert. Es liegen jetzt die Anfangspunkte von $\tilde{v}_1^{(1)}$ und $\tilde{v}_2^{(1)}$ im Unendlichen, so daß gilt:

$$\text{(5.2.4)} \qquad \begin{cases} \tilde{v}_1^{(1)} = e^{\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \\ \tilde{v}_2^{(1)} = e^{\xi} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich ähnlich wie in (5.2.3):

$$\text{(5.2.5)} \qquad \tilde{v}_1^{(1)}(\xi) = 4^{-\frac{\delta_\infty}{2}} \left[x(x-1)\right]^{-\frac{1}{4}} \tilde{y}^{(1)}_{(-\infty, 0)}(x).$$

Mit Hilfe von Formel (4.6.2) läßt sich $\tilde{v}_1^{(1)}$ von $\widetilde{S}_1$ nach S_1 analytisch fortsetzen. Es ist in S_1

$$\text{(5.2.6)} \qquad \tilde{v}_1^{(1)} = v_1^{(1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + v_1^{(2)} O\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Abschätzung von $\tilde{y}^{(1)}_{(-\infty, 0)}(x)$ bei analytischer Fortsetzung über das Intervall $(0, 1)$ hinweg in die obere Halbebene. Andererseits gilt hierfür eine Relation vom Typus (4.2.2); wir schreiben sie nach leichter Umformung so:

$$\text{(5.2.7)} \qquad \begin{cases} y^{(2)}_{(-\infty, 0)} = \dfrac{1}{2\pi i H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)} \times \\ \qquad \times \left[\tilde{y}^{(1)}_{(-\infty, 0)} + \dfrac{i}{\sin \pi \delta_\infty} \left(e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1\right) y^{(1)}_{(-\infty, 0)}\right]. \end{cases}$$

Setzt man hierin die Lösungen $v(\xi)$ aus (5.2.3) und (5.2.5) ein, berücksichtigt (5.2.6), die analytische Fortsetzung von $[x(x-1)]^{-\frac{1}{4}}$ und schließlich noch die Tatsache, daß

$$4^{-\delta_\infty} 2\pi H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1) = 1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

ist, so erhält man die folgende Abschätzung für $y^{(2)}_{(-\infty, 0)}$:

$$\text{(5.2.8)} \qquad \begin{cases} 4^{\frac{\delta_\infty}{2}} \left[x(x-1)\right]^{-\frac{1}{4}} y^{(2)}_{(-\infty, 0)}(x) = v_1^{(1)}(\xi) \left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + v_1^{(2)}(\xi) \left[\dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty} \left(e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1\right) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Man sieht, daß wegen des Ausdrucks $\sin \pi \delta_\infty$ im Nenner die Formel (5.2.8) für ganze δ_∞ ihren Sinn verliert[10]).

[10]) Es sei denn, daß auch der Ausdruck $e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1$ verschwindet; die kanonischen Lösungen zu $x = \infty$ sind dann beide logarithmenfrei. Die Formel (5.2.8) läßt sich übrigens auch aus rein geometrischen Überlegungen heraus ableiten ohne Benutzung von (4.2.3) (4.2.4). Man vergleicht hierzu die konforme Abbildung von $\eta = \frac{v^{(1)}}{v^{(2)}}$ mit der von $\eta^* = \frac{y^{(1)}}{y^{(2)}}$.

Mit Hilfe der Relation (4.2.2) und der Potenzreihenentwicklung für $\tilde{y}^{(2)}_{(-\infty,0)}$ kann man nun andererseits eine Abschätzung für die analytische Fortsetzung von $v_1^{(2)}$ nach $\tilde{S}_1$ gewinnen, die im Gegensatz zu (5.2.7) für beliebige δ_∞ aber große ξ gilt. Solche Abschätzungen sind bei Verwendung dieser Lösungen als Hilfsfunktionen wichtig. Sie lautet:

$$(5.2.9) \qquad v_1^{(2)}(\xi) = 4^{-\delta_\infty} 2\pi H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{-\left(\xi - \frac{i\pi\delta_\infty}{2}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right),$$

in $\tilde{S}_1$ und $\tilde{S}_2$.

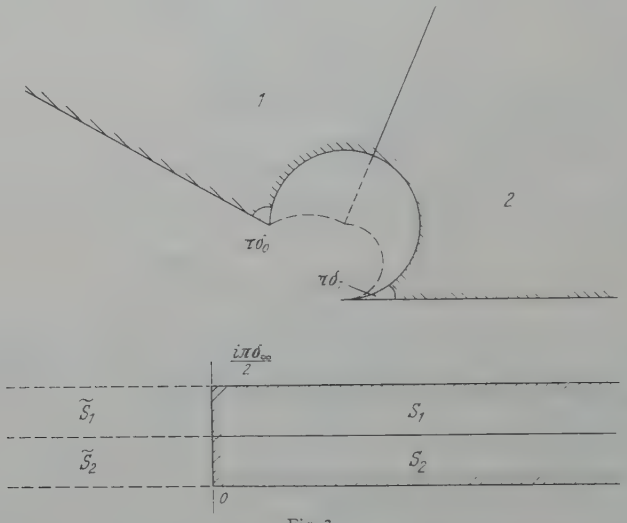

Fig. 3

Schließlich wäre noch die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta(\xi)$ zu betrachten. Die in diesem Fall sehr einfache Konstruktion des Kreisbogendreiecks ist Fig. 3 zu entnehmen[11]).

5.3. δ_∞ imaginär. Die Einteilung des ξ-Polygons in Teilbereiche ist hier dieselbe wie bei reellem δ_∞. Die Halbstreifen S_1, S_2 liegen aber jetzt parallel zur imaginären Achse, so daß die Anfangspunkte der asymptotischen Integration sowohl für $v^{(1)}_{1,2}$ als auch für $v^{(2)}_{1,2}$ im Unendlichen liegen. Dadurch wird es möglich, alle diese Lösungen durch kanonische Lösungen von (4.1.1) auszudrücken. So wird etwa[12]):

$$(5.3.1) \qquad \begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = 4^{\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(2)}_{(-\infty,0)}(x) \\ v_1^{(2)}(\xi) = 4^{-\frac{\delta_\infty}{2}} [x(x-1)]^{-\frac{1}{4}} y^{(1)}_{(-\infty,0)}(x). \end{cases}$$

[11]) Diese Konstruktionen mögen im Falle der Riemannschen Differentialgleichung überflüssig erscheinen, weil man hier ohne Benutzung der Differentialgleichung auf rein geometrischem Wege die zugehörigen Kreisbogendreiecke konstruieren kann. Doch ist dies keineswegs einfach, wie die Untersuchungen von SCHILLING [5] zeigen.

[12]) Es ist hier natürlich für $4^{\pm\delta_\infty}$ der Wert $e^{\pm\delta_\infty \log 4}$ zu wählen bei reellem log 4.

Entsprechende Beziehungen gelten zwischen den in $\widetilde{S}_1$ definierten $\tilde{v}_1^{(1)(2)}$ und den $\tilde{y}_{(-\infty,0)}^{(1)(2)}$. Die Relation vom Typus (4.2.2) drückt sich dann folgendermaßen als Relation zwischen den v und $\tilde{v}$ aus:

$$(5.3.2)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = 4^{\delta_\infty} 2\pi H_0(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(1)} + \\ \quad + \dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty} (e^{-i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -\dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty} (e^{i\pi\delta_\infty} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(1)} + \\ \quad + 4^{-\delta_\infty} 2\pi H_0(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, \tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

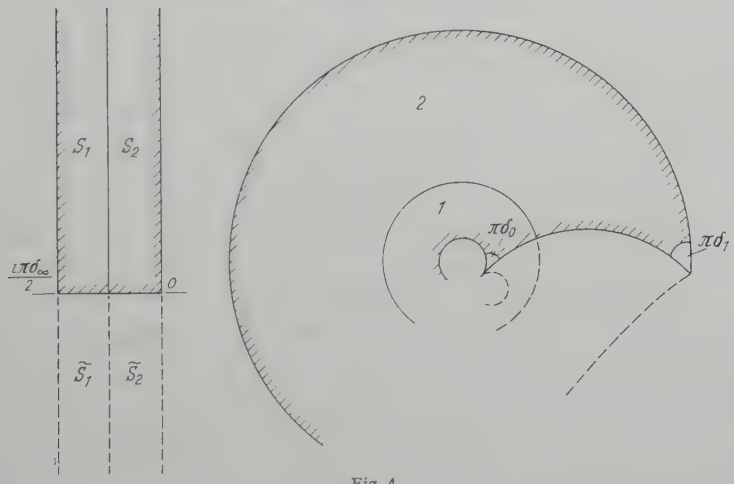

Fig. 4

Diese Relation gilt — im Gegensatz etwa zu (5.2.6) — exakt für alle δ_∞. Natürlich läßt sie sich auch mit Hilfe der in 4.7 aufgeführten Relation für große $|\delta_\infty|$ abschätzen. Man erhält auf diese Weise eine gewisse Anschauung für die Größe des zu erwartenden Fehlers bei Abschätzung durch asymptotische Integration.

Die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta(\xi)$ zeigt Fig. 4.

§ 6. Die Liouville-Transformation (4.3.2)

6.1. Mit den in § 5 angegebenen Methoden lassen sich auch die Liouville-Transformationen (4.3.2) und (4.3.3) behandeln. Da hierbei keine wesentliche neuen Gesichtspunkte auftreten, können wir uns darauf beschränken, die Ergebnisse anzugeben. Wie schon in der Einleitung betont, bestehen diese Ergebnisse

1. in asymptotischen Abschätzungen der kanonischen Lösungen der Riemannschen Differentialgleichung, d.h. wir geben die Beziehungen zwischen den $y_{(\alpha,\beta)}^{(i)}$ und den $v_k^{(i)}$ an, und

2. in den Fortsetzungsrelationen der $v_k^{(i)}$; diese werden gebraucht bei Verwendung der transformierten Riemannschen Differentialgleichung als

Hilfsdifferentialgleichung zur asymptotischen Abschätzung der Lösungen komplizierterer Differentialgleichungen.

Die hierfür erforderlichen Rechnungen sind zwar methodisch einfach aber einigermaßen mühsam; wir haben uns daher bemüht, die Ergebnisse so vollständig wie möglich anzugeben, auch wenn hierdurch eine etwas monotone Aufzählung zustande kam. Es zeigt sich aber, daß jeder Einzelfall kleine Besonderheiten aufweist, die man von vornherein nicht hätte erkennen können.

6.2. Wie schon erwähnt, ist die Transformation (4.3.2) in den Fällen angezeigt, in denen sowohl $|\delta_\infty|$ als auch $|\delta_1|$ groß sind. Dagegen muß $\delta_0^2 \leqq \frac{1}{4}$ vorausgesetzt werden. Ist $\delta_1 \neq \delta_\infty$, dann hat $\varphi(x)$ eine einfache Nullstelle bei

$$x = s = \frac{\delta_\infty^2 - \delta_1^2}{\delta_\infty^2}.$$

In diesem Fall wird das Integral $\xi(x)$ mit $x_0 = 0$ als untere Grenze:

$$(6.2.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = \dfrac{\delta_\infty}{2}\left[\log\left(2x - s + 2\sqrt{x(x-s)}\right) - \log(-s)\right] - \\ \quad - \dfrac{\sqrt{\delta_1^2}}{2}\left[\log\left[\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{s}{s-1} + 2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{s}{s-1}\right)}\right] - \log\dfrac{s}{1-s}\right]. \end{cases}$$

Die Funktionswerte seien so festgelegt, daß für reelle x und $x \to +\infty$ bzw. $\frac{x}{x-1} \to +\infty$ die Wurzeln positiv reelle und die Logarithmen reelle Werte annehmen. Die so festgelegten Funktionselemente lassen sich überall in die obere Halbebene analytisch fortsetzen und sind dort eindeutig. Mit dieser Festsetzung soll weiter $\sqrt{\delta_1^2}\sqrt{x(x-s)}$ gleich dem Wert von $\delta_\infty\sqrt{x(x-s)}$ an der Stelle $x = 1$ und die $\log(-s)$ und $\log\frac{s}{1-s}$ gleich dem vorangehenden Ausdruck an der Stelle $x = 0$ sein.

Ist $\delta_1 = \delta_\infty$ so wird einfach

$$(6.2.2)\qquad \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\left(\log(x-1) - i\pi\right).$$

Das ξ-Polygon ist dann ein Streifen und die transformierte Differentialgleichung hat dort nur eine Singularität an der Stelle $\xi = 0$ mit dem Index $\delta_0/2$. Diese Differentialgleichung hat die Form (5.1.3), wenn dort $\delta_0 = \frac{1}{2}$ und $\delta_1 = \delta_0/2$ gesetzt wird.

Im allgemeinen Fall $\delta_1 \neq \delta_\infty$ läßt sich die transformierte Differentialgleichung nicht mehr explizit angeben. Sie hat im ξ-Polygon Singularitäten bei $\xi(0) = 0$ mit dem Index δ_0 und bei $\xi(s)$ mit dem Index $\frac{1}{3}$.

Abgesehen von einer Vertauschung der δ_ν sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. δ_∞, δ_1 *beide reell*, $\delta_1 < \delta_\infty$.
2. δ_∞, δ_1 *beide reell*, $\delta_1 = \delta_\infty$.
3. δ_∞, δ_1 *beide imaginär*, $|\delta_1| < |\delta_\infty|$.
4. δ_∞, δ_1 *beide imaginär*, $\delta_1 = \delta_\infty$.
5. δ_∞ *reell*, δ_1 *imaginär*.

6.3. Zur Vereinfachung der Formeln führen wir noch einige Hilfsgrößen ein. Wir definieren zunächst als:

$$c_1(\delta_\alpha, \delta_\beta) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} \log \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} - \frac{\delta_\alpha - \delta_\beta}{2} \log \frac{\delta_\alpha - \delta_\beta}{2}.$$

$$c_1'(\delta_\alpha, \delta_\beta) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} \log \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{2} + \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{2} \log \frac{\delta_\beta - \delta_\alpha}{2}.$$

Hierbei soll der Logarithmus so festgelegt werden, daß

$$|\Im(\log \ldots)| < \pi$$

wird. Logarithmen negativ reeller Größen treten hier nicht auf.

Mit diesen Größen und den in 4.2 eingeführten G_0 und H_0 bilden wir die folgenden Ausdrücke, die als Relationskoeffizienten der transformierten Lösungen auftreten:

$$G_1(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) \times \\ \times \exp\left[\frac{1}{2}(\log \delta_\alpha - \log \delta_\beta) - c_1(\delta_\alpha, \delta_\beta) - c_1'(\delta_\beta, \delta_\alpha)\right].$$

$$H_1(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = 2\pi H_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)\, e^{-2c_1(\delta_\alpha, \delta_\beta)}.$$

$$H_1'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\Gamma(1+\delta_\alpha)}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)} \times \\ \times e^{-2c_1'(\delta_\alpha, \delta_\beta)}.$$

Auf Grund der Stirlingschen Formel streben diese Größen im allgemeinen gegen 1, wenn $\varrho \to \infty$ geht (vgl. 4.3). Dies Ergebnis läßt sich auch mit Hilfe der asymptotischen Integration gewinnen. Es eröffnen sich hier sehr reizvolle Ausblicke auf Zusammenhänge zwischen der Theorie der Gammafunktion und der hypergeometrischen Funktionen.

Weiter definieren wir die folgenden Funktionen von x, die bis auf Konstanten mit der Größe $\sqrt[4]{\varphi(x)}$ übereinstimmen:

$$\psi_\infty^{(1)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-c_1(\delta_\infty, \delta_1)},$$

$$\psi_\infty^{(2)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x}\right)^{\frac{1}{4}} e^{c_1(\delta_\infty, \delta_1)},$$

$$\psi_1^{(1)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x(1-s)}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-c_1(\delta_1, \delta_\infty)},$$

$$\psi_1^{(2)}(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x-s}{x(1-s)}\right)^{\frac{1}{4}} e^{c_1(\delta_1, \delta_\infty)}.$$

Dieselben Größen, aber mit c_1' statt mit c_1 gebildet, seien als $\psi_\alpha^{\prime(i)}$ bezeichnet. Für die auftretenden Potenzen seien wie in (4.1.2) die Hauptwerte gewählt, d.h. in diesem Fall positiv reelle Werte für positiv reelle Argumente, und deren analytische Fortsetzung in die obere Halbebene.

6.4. δ_∞, δ_1 beide reell, $\delta_1 < \delta_\infty$. Es ist hier $0<s<1$ und $\sqrt{\delta_1^2}=\delta_1$. Ferner wird $\xi(s)=-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1)$.

Die obere Halbebene wird durch $\xi(x)$ auf das in Fig. 5 dargestellte ξ-Polygon abgebildet. Dieses ξ-Polygon möge in der dort gezeigten Weise in vier Halbstreifen S_1-S_4 eingeteilt werden. Mit den in diesen Halbstreifen definierten

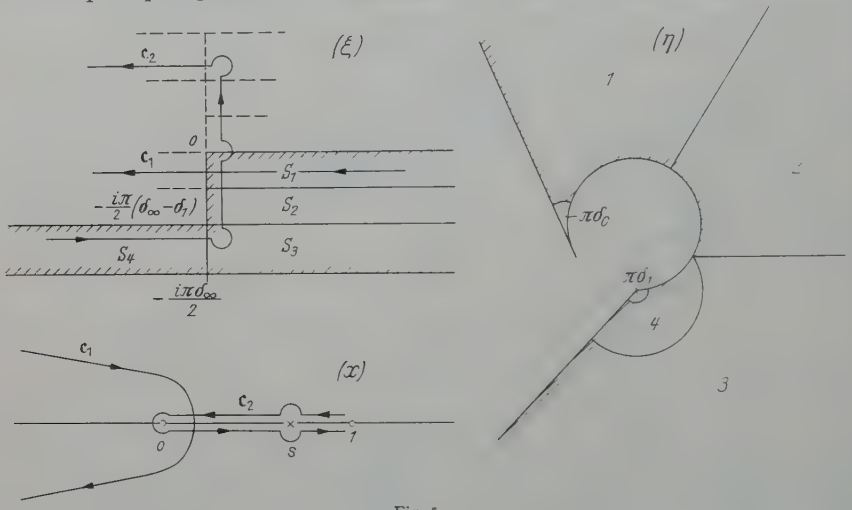

Fig. 5

$v_k^{(i)}$ lassen sich die kanonischen Lösungen der Riemannschen Differentialgleichung wie folgt abschätzen [vgl. (5.2.3) und (5.2.8)]:

$$(6.4.1)\quad \begin{cases} \psi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \\ \psi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)+ \\ \qquad + e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}\left(\frac{\cos\pi(\delta_\infty-\delta_1)+\cos\pi\delta_0}{H_1(\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\sin\pi\delta_\infty}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \end{cases}$$

$$(6.4.2)\quad \begin{cases} \psi_1'^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_4^{(1)}, \\ \psi_1'^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_4^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)+ \\ \qquad + e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_4^{(1)}\left(\frac{1}{2H_1'(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\sin\pi\delta_1}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \end{cases}$$

Für die analytische Fortsetzung innerhalb des ξ-Polygons gelten — neben den trivialen Relationen[13]

$$(6.4.3)\qquad v_1^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1)}, \qquad v_2^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1)}\, v_3^{(2)}$$

[13]) Wir werden derartige Relationen im folgenden nicht mehr besonders angeben.

die beiden folgenden, die wie (5.2.9) auch für kleine δ_∞ und δ_1 gültig sind. Es ist

$$(6.4.4)\quad \begin{cases} v_3^{(2)}(\xi) = G_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{-\left(\xi + \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) & \text{in } S_4, \\ v_4^{(1)}(\xi) = G_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{\left(\xi + \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) & \text{in } S_3. \end{cases}$$

Für die analytische Fortsetzung aus dem ξ-Polygon heraus auf Wegen $\mathfrak{C}_\nu$, die geschlossenen Umläufen in der x-Ebene entsprechen (vgl. Fig. 5) gelten, die folgenden Relationen:

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(6.4.5)\qquad v_1^{(2)}(\xi) = H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_1,$$

und auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(6.4.6)\quad \begin{cases} v_4^{(2)}(\xi) = 2i\left(\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\,\delta_0\right) H_1'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0) \times \\ \qquad \times e^{-\left(\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_4. \end{cases}$$

Hierbei sind die $\widetilde{S}_\nu$ natürlich jeweils so definiert, wie es der analytischen Fortsetzung von $\xi(x)$ längs der betrachteten Wege entspricht, d. h. $\widetilde{S}_\nu$ geht aus S_ν durch Spiegelung an der Seite des ξ-Polygon hervor, die durch die Kurve $\mathfrak{C}_\mu$ jeweils überschritten wird.

Die konforme Abbildung des ξ-Polygons durch $\eta(\xi)$ zeigt Fig. 5. Bemerkenswert ist hier, daß die Berandung des ξ-Polygons in der Umgebung von $\xi(s) = -\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1)$ durch $\eta(\xi)$ auf einen glatten Kreisbogen abgebildet wird; dies muß natürlich so sein, da die Differentialgleichung (4.1.1) dort keine singuläre Stelle hat, und wird dadurch erreicht, daß die an diesem Punkt zusammenstoßenden singulären Ecken von S_2, S_3 und S_4 jeweils in einen Winkel der Größe $\frac{\pi}{3}$ übergehen, was zusammen den glatten Winkel der Größe π ergibt. Entsprechendes tritt bei allen einfachen Nullstellen von $\varphi(x)$ auf.

6.5. δ_∞, δ_1 beide reell, $\delta_1 = \delta_\infty$. Die im vorigen Abschnitt 6.2 durchgeführten Untersuchungen bleiben größtenteils auch für diesen Fall gültig, wenn man dort den Grenzübergang $\delta_1 \to \delta_\infty$ macht. Ungültig werden bei diesem Grenzübergang nur die Abschätzungen in der Nähe der singulären Stellen, weil diese dabei einander beliebig nahe kommen, was nach 3.8 ausgeschlossen werden mußte. Dies betrifft insbesondere die Konstruktion des Kreisbogenpolygons aus dem ξ-Polygon; die in Fig. 6[14]) für diesen Fall angegebene Konstruktion unterscheidet sich wesentlich von der in Fig. 5 gezeigten. Weiter ist noch zu berücksichtigen, daß jetzt einige der in den

[14]) Das Kreisbogendreieck setzt sich in diesem Fall übrigens zusammen aus zwei zueinander symmetrischen mit den Winkeln $\pi\delta_\infty$, $\frac{\pi\delta_0}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Dem entspricht die in 6.2 erwähnte Rückführung der Differentialgleichung auf die Form (5.1.3).

Formeln auftretenden H_1, H_1' nicht mehr gegen 1 streben für $\varrho \to \infty$. Es gilt nämlich:

$$(6.5.1) \qquad \begin{cases} H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0) = 2\cos\pi\dfrac{\delta_0}{2} + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right), \\ H_1'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0) = \dfrac{1}{2\cos\pi\dfrac{\delta_0}{2}} + O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right). \end{cases}$$

Bei dem Grenzübergang $\delta_1 \to \delta_\infty$ verschwinden die Teilbereiche S_1 und S_2; die übrigbleibenden seien weiter als S_3 und S_4 bezeichnet. Dann bleiben alle

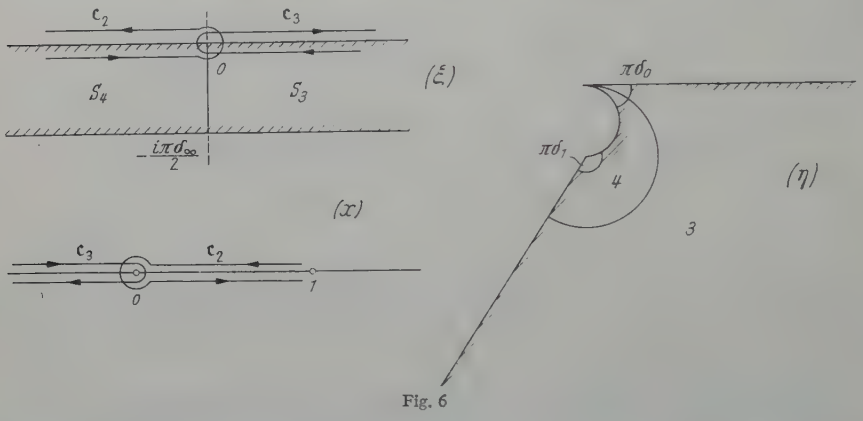

Fig. 6

Formeln des vorigen Abschnitts, bis auf die sinnlos werdende (6.4.5), gültig. An Stelle von (6.4.5) notieren wir die Relation für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$:

$$(6.5.2) \qquad v_3^{(2)}(\xi) = -i\,H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_3.$$

Hier, sowie bei der unverändert gültigen Relation (6.4.6) sorgt (6.5.1) für die Übereinstimmung mit den in 4.6 abgeleiteten Relationen.

6.6. δ_∞, δ_1 beide imaginär, $|\delta_1| < |\delta_\infty|$. Das ξ-Polygon ist hier das gleiche wie in Fig. 5, nur ist es um $\pi/2$ im positiven Sinne gedreht.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(6.6.1) \qquad \begin{cases} \psi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, & \psi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)} \\ \psi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(1)}, & \psi_1^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{\frac{-i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(6.6.2) \qquad \begin{cases} v_3^{(1)} = G_1(-\delta_1, -\delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(1)} - i\,G_1(\delta_1, -\delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(2)} \\ v_3^{(2)} = i\,e^{2i\pi\delta_1} G_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(1)} + G_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(6.6.3)\qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = H_1(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty}\,(e^{-i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_1^{(2)} \\ v_1^{(2)} = -\dfrac{1}{\sin\pi\delta_\infty}\,(e^{i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

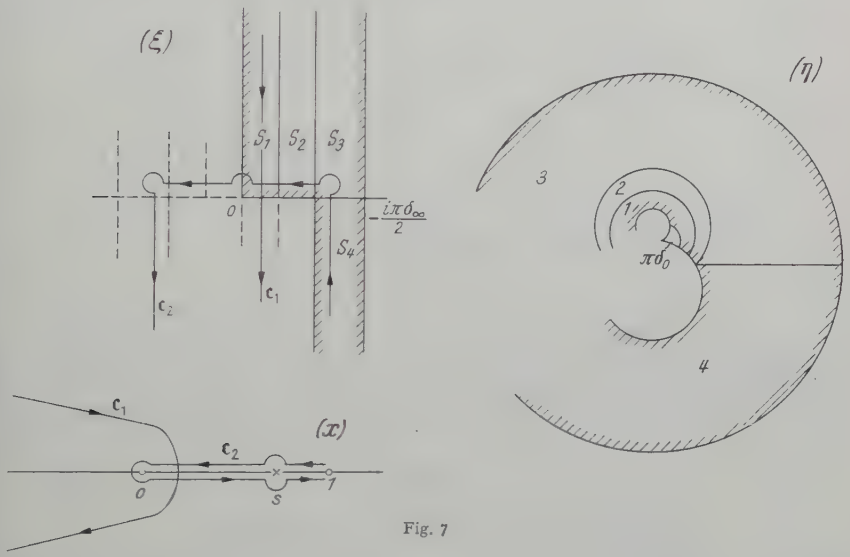

Fig. 7

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(6.6.4)\qquad \begin{cases} v_4^{(1)} = -\dfrac{i}{\sin\pi\delta_1}\,(e^{-i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + i\,e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)}\,H_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = i\,e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)}\,H_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{i}{\sin\pi\delta_1}\,(e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\,\tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

6.7. δ_∞, δ_1 beide imaginär, $\delta_\infty = \delta_1$. Wie in 6.5 bleiben auch hier alle Formeln aus 6.6 bis auf (6.6.3) gültig. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß

$$(6.7.1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} G_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0) \\ G_1(\delta_1, -\delta_\infty, \delta_0) \\ H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0) \\ H_1(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0) \end{array} \right\} = 2\cos\pi\frac{\delta_0}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).$$

wird. Formel (6.6.3) wird ersetzt durch die folgende auf $\mathfrak{C}_3$ gültige Relation:

$$(6.7.2)\qquad \begin{cases} v_3^{(1)} = -\dfrac{i}{\sin\pi\delta_\infty}\,(e^{-i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_3^{(1)} - i\,H_1(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_3^{(2)} \\ v_3^{(2)} = -i\,H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\,\tilde{v}_3^{(1)} + \dfrac{i}{\sin\pi\delta_\infty}\,(e^{i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1)\,\tilde{v}_3^{(2)}. \end{cases}$$

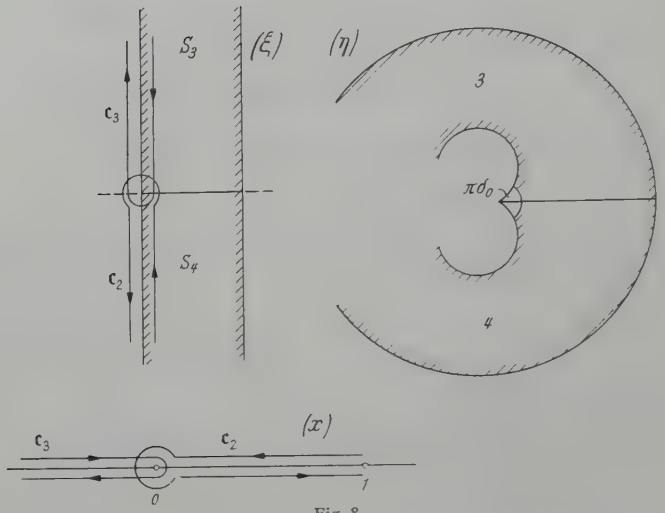

Fig. 8

6.8. δ_∞ reell, δ_1 imaginär. Hier ist $s>1$, $\sqrt{\delta_1^2}=\delta_1$ und $\xi(s)=-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_1)$. Die Einteilung des ξ-Polygons zeigt Fig. 9. Da bei dieser Einteilung S_1^* und S_2^* keine singulären Ecken haben, fassen wir jeden dieser Halbstreifen

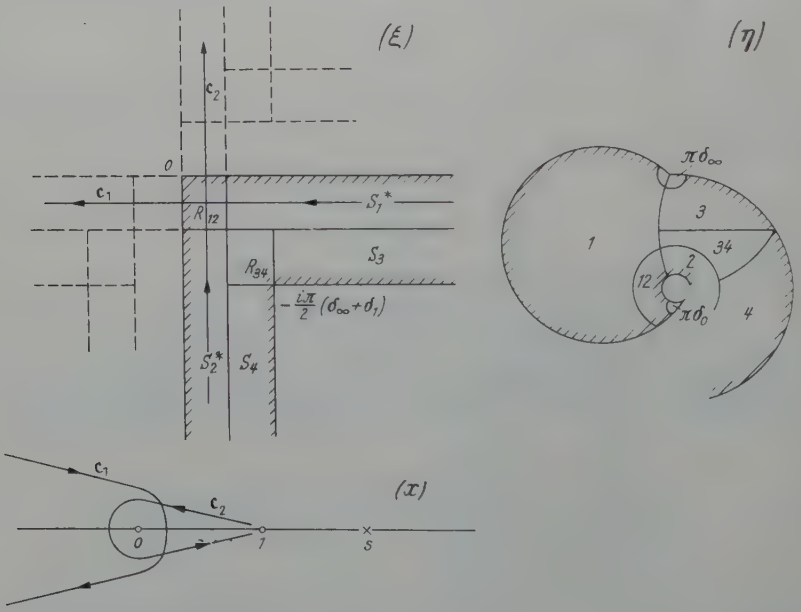

Fig. 9

mit dem Rechteck R_{12} zusammen; die so entstehenden, sich auf R_{12} überdeckenden Halbstreifen bezeichnen wir mit S_1 und S_2. Aut diese Halbstreifen soll sich die Definition der $v_1^{(i)}$, $v_2^{(i)}$ gemäß 4.4, 4.5 beziehen.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(6.8.1)\quad \begin{cases} \psi_1^{(1)}\, y^{(1)}_{(1,0)} = v_2^{(1)}, \quad \psi_1^{(2)}\, y^{(2)}_{(1,0)} = v_2^{(2)}, \quad \psi_\infty^{(1)}\, y^{(1)}_{(-\infty,0)} = v_1^{(2)}, \\ \psi_\infty^{(2)}\, y^{(2)}_{(-\infty,0)} = v_1^{(1)}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\Big) + v_1^{(2)}\Big(\frac{e^{-i\pi\delta_\infty}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_1}{\sin\pi\delta_\infty} + O\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\Big). \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(6.8.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{\xi}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\Big), \\ v_2^{(2)} = -\,i\, e^{i\pi(\delta_\infty + \delta_1)}\, G_1(\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, e^{\xi}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\Big), \end{cases}$$

in S_1 und S_3.

$$(6.8.3)\quad v_3^{(2)} = i\, G_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(1)} + G_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, v_4^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(6.8.4)\quad v_1^{(2)} = H_1(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{-\xi}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\Big) \qquad \text{in } \tilde{S}_1.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(6.8.5)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = H_1(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(1)} - \\ \qquad - \frac{1}{\sin\pi\delta_1}(e^{-i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = \frac{1}{\sin\pi\delta_1}(e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0 + \cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + H_1(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

§ 7. Die Liouville-Transformation (4.3.3)

71. Allgemeines. Wie erwähnt, ist diese Transformation anzuwenden, wenn alle drei δ_ν groß sind. $\wp(x)$ hat die beiden — eventuell zusammenfallenden Nullstellen bei

$$x = s_{1,2} = \frac{\delta_\infty^2 - \delta_1^2 + \delta_0^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2\delta_\infty^2}.$$

Dabei ist Δ die folgende gegenüber Permutationen der δ_ν invariante Größe

$$\Delta = (\delta_0 + \delta_1 + \delta_\infty)(\delta_0 + \delta_1 - \delta_\infty)(\delta_0 - \delta_1 + \delta_\infty)(\delta_0 - \delta_1 - \delta_\infty).$$

$\sqrt{\Delta}$ sei positiv reell oder positiv imaginär angenommen. Ist $\Delta \neq 0$, so läßt sich das Integral $\xi(x)$ mit $x_0 = s_1$ als unterer Grenze folgendermaßen auswerten.

$$(7.1.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\Big[\log\Big(2x - \frac{\delta_\infty^2 - \delta_1^2 + \delta_0^2}{\delta_\infty^2} + 2\sqrt{(x - s_1)(x - s_2)}\Big) - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_\infty^2}\Big] + \\ \quad + \frac{\sqrt{\delta_0^2}}{2}\cdot\Big[\log\Big(\frac{2(x-1)}{x} - \frac{\delta_0^2 - \delta_\infty^2 + \delta_1^2}{\delta_0^2} + \\ \quad + 2\sqrt{\Big(\frac{x-1}{x} - \frac{s_1 - 1}{s_1}\Big)\Big(\frac{x-1}{x} - \frac{s_2 - 1}{s_2}\Big)}\Big) - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_1^2}\Big] - \\ \quad - \frac{\sqrt{\delta_1^2}}{2}\Big[\log\Big(\frac{2}{1-x} - \frac{\delta_1^2 - \delta_0^2 + \delta_\infty^2}{\delta_1^2} + \\ \quad + 2\sqrt{\Big(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-s_1}\Big)\Big(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-s_2}\Big)}\Big) - \log\frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_0^2}\Big]. \end{cases}$$

Die Funktionswerte seien wieder so festgelegt, daß für reelle x und $x \to +\infty$, bzw. $\frac{x-1}{x} \to +\infty$, $\frac{1}{1-x} \to +\infty$ die Wurzeln positiv reelle, die Logarithmen reelle Werte annehmen. $\sqrt{\delta_0^2}$, $\sqrt{\delta_1^2}$ seien die Werte von $\delta_\infty \sqrt{(x-s_1)(x-s_2)}$ an den Stellen $x=0$ bzw. $x=1$, und die $\log \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta_\nu^2}$ seien die Werte des jeweils vorangehenden Ausdrucks an der Stelle $x=s_1$, immer bei analytischer Fortsetzung in der — eventuell aufgeschnittenen[15]) — oberen Halbebene.

Ist $\Delta=0$, so fallen die Nullstellen zusammen, $s_1=s_2=s$ und $\xi(x)$ wird dann:

$$(7.1.2) \qquad \begin{cases} \xi(x) = \frac{\delta_\infty}{2}\big[s(\log x - \log s) + \\ \qquad + (1-s)\big(\log(x-1) - \log(s-1)\big)\big]. \end{cases}$$

Die transformierte Differentialgleichung läßt sich auch hier in der Regel nicht explizit angeben. Ihre singulären Stellen liegen bei $\xi(s_1)=0$ und $\xi(s_2)$. Liegen die Nullstellen getrennt, $\Delta \neq 0$, so haben diese Singularitäten den Index $\frac{1}{3}$, fallen sie zusammen, so hat die Singularität den Index $\frac{1}{4}$.

Abgesehen von einer Vertauschung der δ_ν sind die folgenden Fälle zu unterscheiden, die wir der Reihe nach untersuchen wollen:

1. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *reell*, $\Delta>0$, $\delta_0+\delta_1<\delta_\infty$.
2. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *reell*, $\Delta=0$, $\delta_0+\delta_1=\delta_\infty$.
3. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *reell*, $\Delta<0$.
4. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *imaginär*, $\Delta>0$, $|\delta_\sigma|+|\delta_1|<|\delta_\infty|$.
5. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *imaginär*, $\Delta=0$, $\delta_0+\delta_1=\delta_\infty$.
6. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ *imaginär*, $\Delta<0$.
7. δ_1, δ_∞ *reell*, δ_0 *imaginär*.
8. δ_1, δ_∞ *imaginär*, δ_0 *reell*.

7.2. Wie in 6.3 führen wir noch einige Hilfsgrößen ein. Wir definieren als

$$c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} - \\ - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2} - \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} - \\ - \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}.$$

$$c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} - \\ - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2} + \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2} + \\ + \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}.$$

[15]) Wenn $\Delta<0$ ist, dann sind s_1 und s_2 konjugiert komplex und wir müssen zur eindeutigen Bestimmung von $\xi(x)$ die obere x-Halbebene in geeigneter Weise aufschneiden. Vgl. auch 2.3.

$$c_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \delta_\alpha \log \delta_\alpha - \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2} -$$
$$- \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2} - \frac{\delta_\alpha+\delta_\gamma-\delta_\beta}{4} \log \frac{\delta_\alpha+\delta_\gamma-\delta_\beta}{2} +$$
$$+ \frac{\delta_\beta+\delta_\gamma-\delta_\alpha}{4} \log \frac{\delta_\beta+\delta_\gamma-\delta_\alpha}{2}.$$

$$|\Im(\log \ldots)| < \pi.$$

Weiter sei

$$G_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = G_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) \times$$
$$\times \exp\left[\tfrac{1}{2}(\log \delta_\alpha - \log \delta_\beta) - c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) - c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)\right].$$

$$G_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\beta)}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\gamma-\delta_\alpha-\delta_\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\gamma+\delta_\alpha+\delta_\beta}{2}\right)} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{1}{2}(\log \delta_\alpha - \log \delta_\beta) - c_2'(\delta_\alpha, \delta_\gamma, \delta_\beta) - c_2'(\delta_\beta, \delta_\gamma, \delta_\alpha)\right].$$

$$H_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = 2\pi H_0(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)\, e^{-2c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}.$$

$$H_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta-\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha+\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\beta+\delta_\alpha-\delta_\gamma}{2}\right)} \times$$
$$\times e^{-2c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}.$$

$$H_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma) = \frac{\Gamma(\delta_\alpha)\,\Gamma(1+\delta_\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1-\delta_\alpha+\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\delta_\alpha+\delta_\beta-\delta_\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\delta_\alpha-\delta_\beta+\delta_\gamma}{2}\right)} \times$$
$$\times e^{-2c_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}.$$

Schließlich entsprechen den Ausdrücken $\psi_\alpha^{(i)}$ von 6.3 in dieser Liouville-Transformation die folgenden:

$$\chi_\infty^{(1)} = [(x-s_1)(x-s_2)]^{\frac{1}{4}}[x(x-1)]^{-\frac{1}{2}} e^{-c_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)},$$
$$\chi_1^{(1)} = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)}\right]^{\frac{1}{4}}[x(x-1)]^{-\frac{1}{2}} e^{-c_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)},$$
$$\chi_0^{(1)} = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{s_1 s_2}\right]^{\frac{1}{4}}[x(x-1)]^{-\frac{1}{2}} e^{-c_2(\delta_0, \delta_\infty, \delta_1)}.$$

$\chi_\alpha^{(2)}$ seien wieder die gleichen Ausdrücke nur mit $e^{+c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}$ statt $e^{-c_2(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)}$ gebildet. Ebenso seien $\chi_\alpha'^{(i)}$, $\chi_\alpha''^{(i)}$ die entsprechenden Ausdrücke mit $c_2'(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)$ bzw. $c_2''(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma)$ gebildet.

7.3. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ **reell,** $\Delta > 0$, $\delta_0 + \delta_1 < \delta_\infty$. Hier ist $0 < s_1 < s_2 < 1$ und $\sqrt{\delta_0^2} = -\delta_0$, $\sqrt{\delta_1^2} = \delta_1$. Ferner wird $\xi(s_2) = \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)$. Die Teilbereiche im ξ-Polygon seien — um den Übergang zu den folgenden Fällen besser darstellen zu können — von S_2 bis S_7 durchnumeriert.

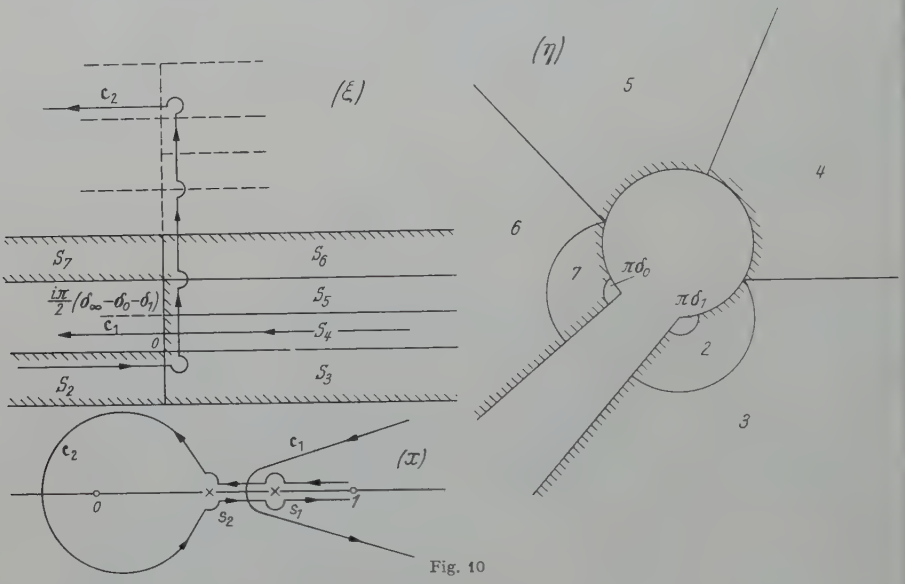

Fig. 10

Asymptotische Abschätzungen:

$$
(7.3.1)\qquad
\begin{cases}
\chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \\
\chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}\left(\frac{\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\delta_0}{H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\sin\pi\delta_\infty} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_1'^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_2^{(1)}, \\
\chi_1'^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_2^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_2^{(1)}\left(\frac{1}{2H_2'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\sin\pi\delta_1} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \\
\chi_0'^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_0}{2}}\, v_7^{(1)}, \\
\chi_0'^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_0}{2}}\, v_7^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\
\qquad + e^{-\frac{i\pi\delta_0}{2}}\, v_7^{(1)}\left(\frac{1}{2H_2'(\delta_0, \delta_\infty, \delta_1)\sin\pi\delta_0} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right).
\end{cases}
$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(7.3.2)\qquad \begin{cases} v_3^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_7^{(1)}(\xi) = -2i \cos\pi \frac{\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1}{2} G_2'(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

bei Fortsetzung nach S_2

$$(7.3.3)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_7^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_0, \delta_\infty, \delta_1)\, e^{\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

bei Fortsetzung nach S_3 bis S_6.

$$(7.3.4)\qquad \begin{cases} v_6^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{-\left(\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(1)}(\xi) = 2i \cos\pi \frac{\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1}{2} G_2'(\delta_1, \delta_0, \delta_\infty) \times \\ \qquad \times e^{-\left(\xi - \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_0 - \delta_1)\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \end{cases}$$

bei Fortsetzung nach S_7.

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.3.5)\qquad v_4^{(2)} = H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_4.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.3.6)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = 2i\left(\cos\pi(\delta_\infty - \delta_1) + \cos\pi\,\delta_0\right) \times \\ \qquad \times H_2'(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{-(\xi - i\pi(\delta_\infty - \delta_1))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \quad \text{in } \widetilde{S}_2. \end{cases}$$

7.4. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ reell, $\Delta = 0$, $\delta_0 + \delta_1 = \delta_\infty$. Ähnlich wie in 6.5 bleiben hier alle Formeln des vorigen Abschnitts bis auf (7.3.5) gültig. An Stelle von (7.3.5) notieren wir die folgende Fortsetzungsrelation für den Weg $\mathfrak{C}_3$:

$$(7.4.1)\qquad v_6^{(2)} = i H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_6.$$

Zu beachten ist auch hier wieder, daß $H_2^{(\prime)}$ zum Teil jetzt nicht mehr gegen 1 strebt für $\varrho \to \infty$. (Vgl. Fig. 11.)

7.5. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ reell, $\Delta < 0$. Die Nullstellen s_1, s_2 sind jetzt konjugiert komplex; nach unseren Festsetzungen liegt s_1 in der oberen, s_2 in der unteren Halbebene. An diesen Stellen ist $\xi(x)$ verzweigt. Um einen eindeutigen Zweig abzutrennen, legen wir in der oberen Halbebene einen Schnitt zwischen s_1 und einen Punkt der reellen Achse im Intervall $(0, 1)$. Nach unseren

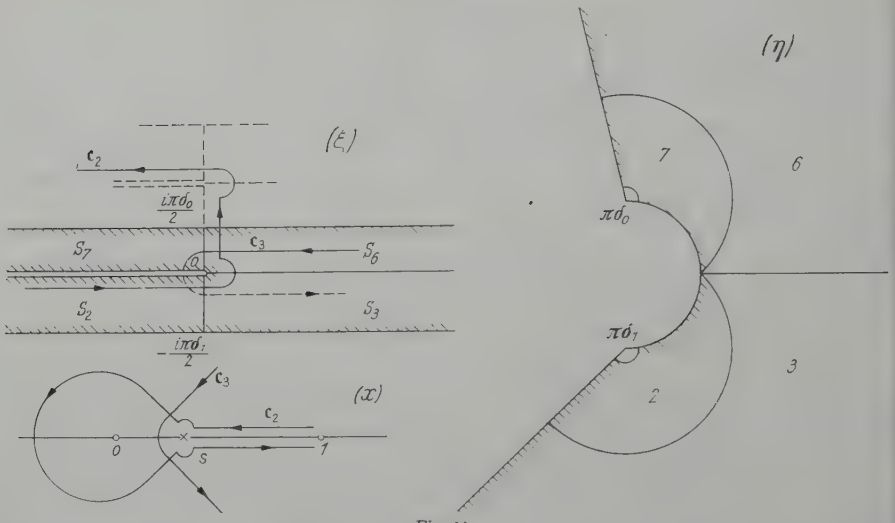

Fig. 11

Festsetzungen in 2.3 sei dieser Schnitt so gelegt, daß sein Bild in der ξ-Ebene parallel zur imaginären Achse verläuft. Das so entstehende — nicht schlichte[16]) — ξ-Polygon ist in Fig. 12 dargestellt. Es werde in Halbstreifen eingeteilt, die wir mit S_1 bis S_3 und S_6 bis S_8 bezeichnen.

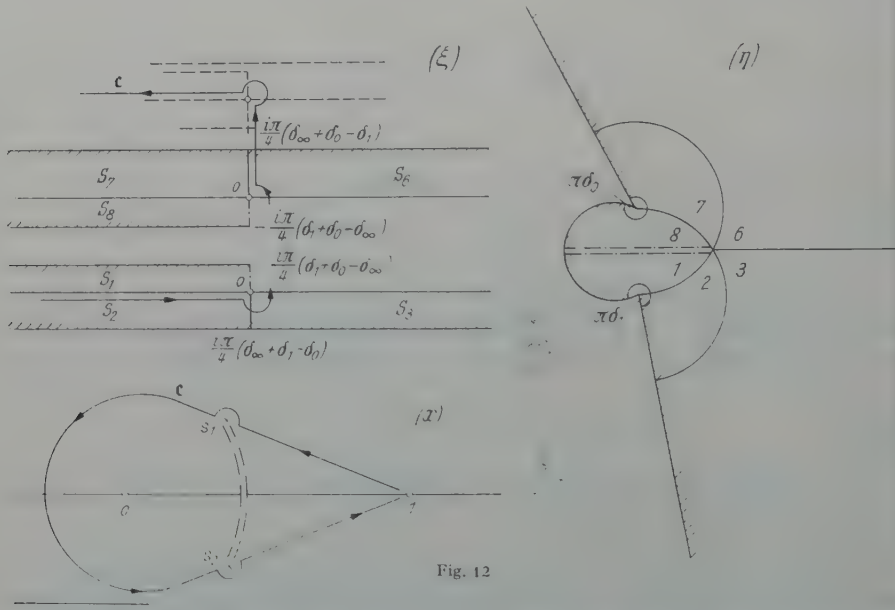

Fig. 12

[16]) Zur besseren Übersicht sind in Fig. 12 die beiden schlichten Teilstücke, aus denen sich das ξ-Polygon zusammensetzt, getrennt nebeneinander dargestellt. Diese Teilstücke sind an der Kante zwischen S_3 und S_6 zusammenzufügen, so daß sich S_1 und S_7 sowie S_2 und S_8 teilweise überdecken.

Asymptotische Abschätzungen:

$$
(7.5.1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\chi_\infty''^{(1)}\, y^{(1)}_{(\infty,1)} = e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, v_3^{(2)},\\
&\chi_\infty''^{(2)}\, y^{(2)}_{(\infty,1)} = e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, v_3^{(1)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\varrho}\right)\right)+\\
&\qquad\qquad +e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, v_3^{(2)}\left(\frac{\cos\pi\,\frac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2}}{H_2''(\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\sin\pi\delta_\infty}+O\left(\tfrac{1}{\varrho}\right)\right),\\
&\chi_1''^{(1)}\, y^{(1)}_{(1,\infty)} = e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_1-\delta_\infty-\delta_0)}\, v_1^{(1)},\\
&\chi_1''^{(2)}\, y^{(2)}_{(1,\infty)} = e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_1+\delta_\infty-\delta_0)}\, v_1^{(2)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\varrho}\right)\right)+\\
&\qquad\qquad +e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_1+\delta_\infty-\delta_0)}\, v_1^{(1)}\left(\frac{\cos\pi\,\frac{\delta_1+\delta_0-\delta_\infty}{2}}{H_2''(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\sin\pi\delta_1}+O\left(\tfrac{1}{\varrho}\right)\right),\\
&\chi_0''^{(1)}\, y^{(1)}_{(0,-\infty)} = e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_0+\delta_\infty-\delta_1)}\, v_7^{(1)},\\
&\chi_0''^{(2)}\, y^{(2)}_{(0,-\infty)} = e^{\frac{i\pi}{4}(\delta_0+\delta_\infty-\delta_1)}\, v_7^{(2)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\varrho}\right)\right)+\\
&\qquad\qquad +e^{-\frac{i\pi}{4}(\delta_0+\delta_\infty-\delta_1)}\, v_7^{(1)}\left(\frac{\cos\pi\,\frac{\delta_0+\delta_\infty-\delta_1}{2}}{H_2''(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\sin\pi\delta_0}+O\left(\tfrac{1}{\varrho}\right)\right).
\end{aligned}\right.
$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$
(7.5.2)\quad \left\{\begin{aligned}
&v_3^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_1, S_2.\\
&v_2^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\xi}\right)\right),\\
&v_7^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_3, S_6.\\
&v_6^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_7, S_8.
\end{aligned}\right.
$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$
(7.5.3)\quad \left\{\begin{aligned}
&v_2^{(1)}(\xi) = 2i\cos\pi\frac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2}\, H_2''(\delta_1,\delta_\infty,\delta_0)\times\\
&\qquad\qquad \times e^{-\left(\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_0-\delta_1)\right)}\left(1+O\left(\tfrac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \widetilde{S}_2.
\end{aligned}\right.
$$

7.6. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ imaginär, $\Delta > 0$, $|\delta_0| + |\delta_1| < |\delta_\infty|$. Das ξ-Polygon ist hier das gleiche wie in 7.3, nur ist es um $\pi/2$ gedreht.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(7.6.1)\qquad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(2)}, \quad \chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_1}{2}}\, v_3^{(1)}, \\ \chi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_2^{(1)}, \quad \chi_1^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(2\delta_0-\delta_\infty)}\, v_7^{(1)}, \quad \chi_0^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(2\delta_0-\delta_\infty)}\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

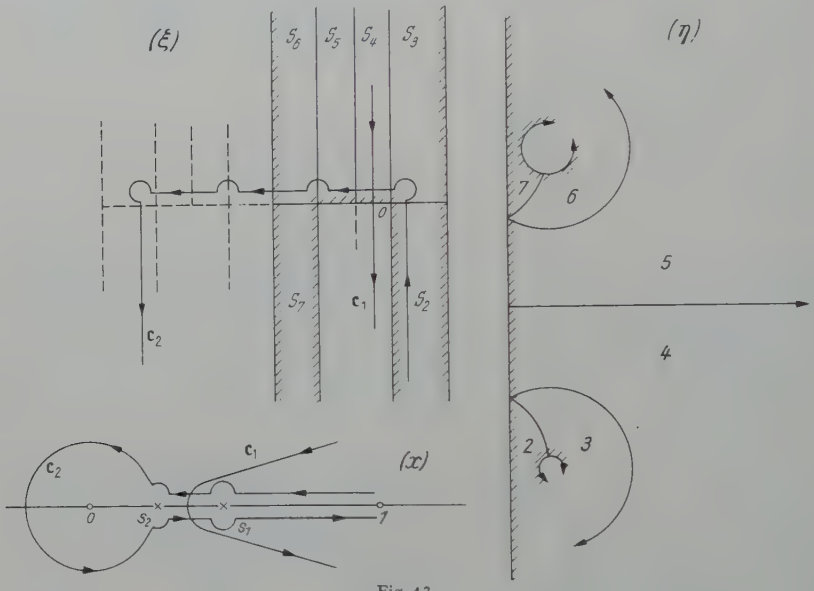

Fig. 13

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon

$$(7.6.2)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + i\, G_2(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = -i\, e^{2\pi i\delta_1} G_2(\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}. \\ v_7^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + i\, e^{2\pi i\delta_0} G_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)}, \\ v_7^{(2)} = -i\, G_2(\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)}. \\ v_2^{(1)} = -e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(-\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(1)} + \\ \qquad + i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(-\delta_0, -\delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(1)} + \\ \qquad + e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_0-\delta_1)} G_2(\delta_0, -\delta_1, \delta_\infty)\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.6.3)\quad \begin{cases} v_4^{(1)} = H_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty}\,(e^{i\pi(\delta_\infty - \delta_1)} \cos \pi \delta_1 + e^{-i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0)\,\tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = -\dfrac{1}{\sin \pi \delta_\infty}\,(e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)} \cos \pi \delta_1 + e^{i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0)\,\tilde{v}_4^{(1)} + \\ \qquad + H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.6.4)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = -\dfrac{i}{\sin \pi \delta_1}\,(e^{-i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_\infty)\,\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + i\,e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)}\,H_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\,e^{-i\pi(\delta_\infty - \delta_1)}\,H_2(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\,\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{i}{\sin \pi \delta_1}\,(e^{i\pi\delta_1} \cos \pi \delta_0 + \cos \pi \delta_\infty)\,\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

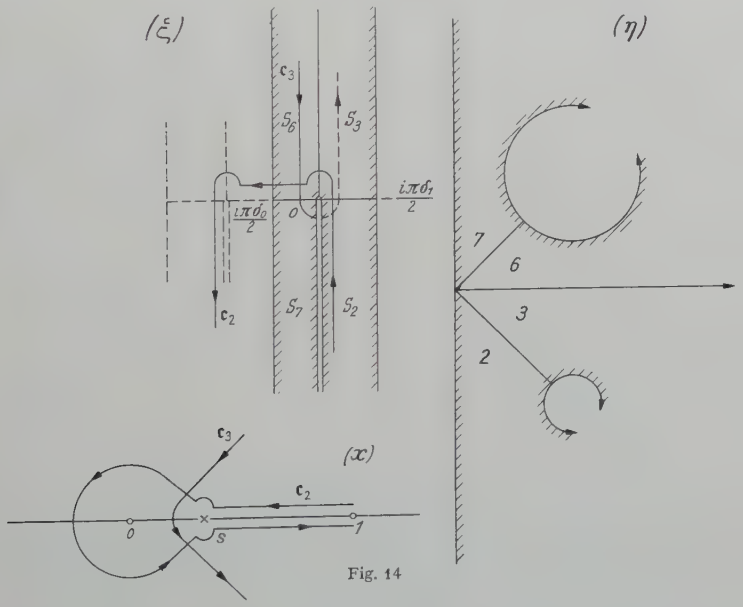

Fig. 14

7.7. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ imaginär, $\Delta = 0$, $\delta_0 + \delta_1 = \delta_\infty$. Alle Formeln von 7.6, bis auf (7.6.3), bleiben gültig. An ihre Stelle tritt die Relation für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$:

$$(7.7.1)\quad \begin{cases} v_6^{(1)} = \dfrac{i}{\sin \pi \delta_\infty}\,(\cos \pi \delta_\infty + e^{i\pi(\delta_0 - \delta_1)})\,\tilde{v}_6^{(1)} + i\,H_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_6^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\,H_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\,\tilde{v}_6^{(1)} - \dfrac{i}{\sin \pi \delta_\infty}\,(\cos \pi \delta_\infty + e^{-i\pi(\delta_0 - \delta_1)})\,\tilde{v}_6^{(2)}. \end{cases}$$

7.8. $\delta_0, \delta_1, \delta_\infty$ imaginär, $\Delta < 0$. Das ξ-Polygon ist hier wieder das gleiche wie in 7.5.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(7.8.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_3^{(2)}, & \chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_3^{(1)}, \\ \chi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_1^{(1)}, & \chi_1^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_1)}\, v_7^{(1)}, & \chi_0^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_1)}\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

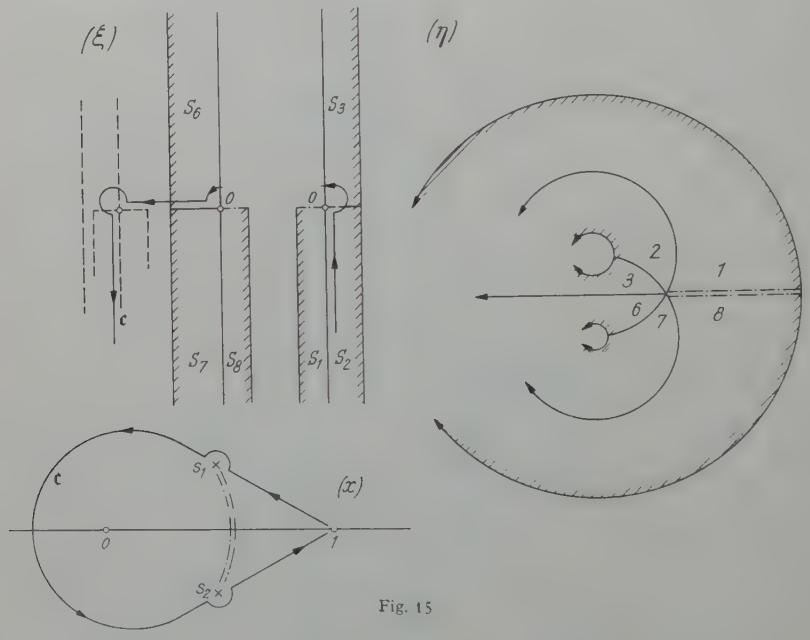

Fig. 15

$$(7.8.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + i\, G_2(-\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = -i\, e^{i\pi(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, G_2(\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_1, \delta_0)\, v_3^{(2)}. \\ v_7^{(1)} = G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + i\, e^{i\pi(\delta_\infty+\delta_1-\delta_0)}\, G_2(-\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)} \\ v_7^{(2)} = -i\, G_2(\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(1)} + G_2(-\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, v_6^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(7.8.3)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = \dfrac{-i}{\sin\pi\delta_1}\left(e^{i\pi(\delta_0-\delta_\infty)}\cos\pi\dfrac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2} + \cos\pi\dfrac{\delta_\infty+\delta_0+\delta_1}{2}\right)\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_0-\delta_1)}\, H_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty+\delta_0-\delta_1)}\, H_2(-\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, \tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{i}{\sin\pi\delta_1}\left(e^{-i\pi(\delta_0-\delta_\infty)}\cos\pi\dfrac{\delta_\infty+\delta_0-\delta_1}{2} + \cos\pi\dfrac{\delta_\infty+\delta_0+\delta_1}{2}\right)\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

7.9. δ_1, δ_∞ reell, δ_0 imaginär. Hier ist $s_2<0<s_1<1$, $\sqrt{\delta_0^2}=\delta_0$, $\sqrt{\delta_1^2}=\delta_1$ und $\xi(s_2)=\dfrac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1-\delta_0)$.

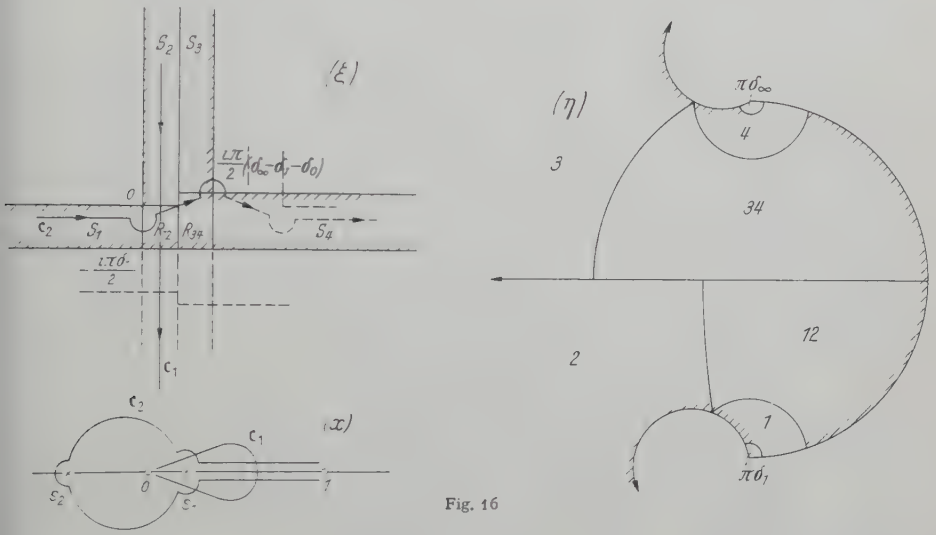

Fig. 16

Asymptotische Abschätzungen:

$$
\left\{\begin{aligned}
&\chi_\infty^{(1)}\, y_{(\infty,1)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_4^{(2)},\\
&\chi_\infty^{(2)}\, y_{(\infty,1)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_4^{(1)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)+\\
&\qquad\qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0-\delta_\infty)}\, v_4^{(2)}\left(\frac{e^{-i\pi\delta_0}}{2\sin\pi\delta_\infty}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right),\\
&\chi_1^{(1)}\, y_{(1,\infty)}^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0+\delta_1)}\, v_1^{(1)},\\
&\chi_1^{(2)}\, y_{(1,\infty)}^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_0+\delta_1)}\, v_1^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)+\\
&\qquad\qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_0+\delta_1)}\, v_1^{(1)}\left(\frac{e^{-i\pi\delta_0}}{2\sin\pi\delta_1}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right),\\
&\chi_0^{(1)}\, y_{(0,-\infty)}^{(1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_3^{(2)}, \qquad \chi_0^{(2)}\, y_{(0,-\infty)}^{(2)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_3^{(1)}.
\end{aligned}\right. \tag{7.9.1}
$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$
\left\{\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= G_2(\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, v_2^{(1)} + i\, G_2(-\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, v_2^{(2)};\\
v_4^{(2)} &= -i\, G_2(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, v_3^{(1)} + G_2(-\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, v_3^{(2)}.
\end{aligned}\right. \tag{7.9.2}
$$

$$(7.9.3)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)}(\xi) = -i\,G_2(\delta_1, -\delta_0, \delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_1, \delta_0, \delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(2)}(\xi) = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1-\delta_0)}\, G_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } S_1. \end{cases}$$

$$(7.9.4)\qquad \begin{cases} v_3^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, -\delta_0, \delta_1)\, e^{\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1-\delta_0)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_3^{(2)}(\xi) = i\,G_2(\delta_\infty, \delta_0, \delta_1)\, e^{\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1-\delta_0)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_1^{(1)}(\xi) = G_2(\delta_\infty, \delta_1, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \quad \text{in } S_4. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.9.5)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = e^{-i\pi\delta_1} H_2(-\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\,\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + \frac{1}{\sin\pi\delta_0}\left(e^{-i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty\right)\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = -\frac{1}{\sin\pi\delta_0}\left(e^{i\pi\delta_0}\cos\pi\delta_1 + \cos\pi\delta_\infty\right)\tilde{v}_2^{(1)} + \\ \qquad + e^{i\pi\delta_1} H_2(\delta_0, \delta_1, \delta_\infty)\,\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.9.6)\qquad v_1^{(1)} = H_2(\delta_1, \delta_\infty, \delta_0)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_1.$$

7.10. δ_1, δ_∞ imaginär, δ_0 reell. Wie in 7.9 ist $s_2<0<s_1<1$, jedoch wird $\sqrt{\delta_0^2} = -\delta_0$, $\sqrt{\delta_1^2} = \delta_1$ und $\xi(s_2) = \frac{i\pi}{2}(\delta_\infty - \delta_1 + \delta_0)$. ξ-Polygon wie in 7.9.

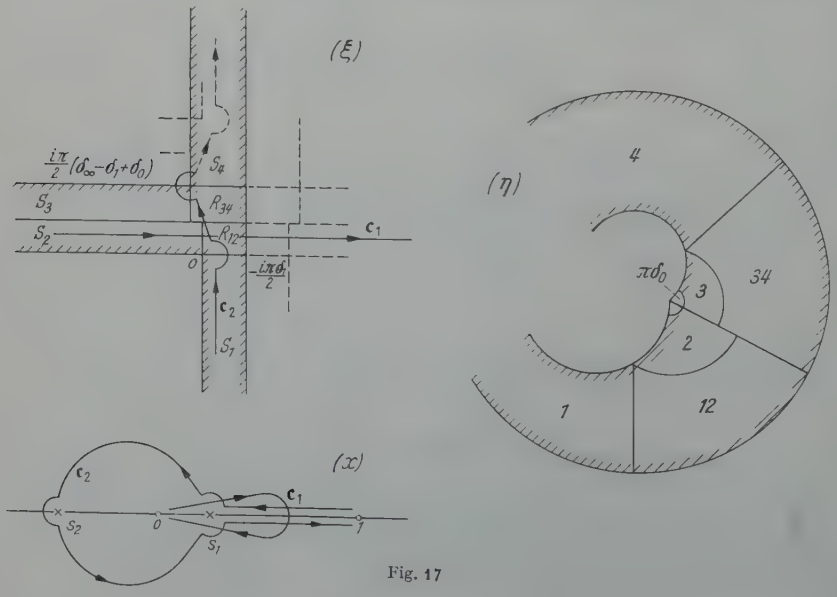

Fig. 17

Asymptotische Abschätzungen:

$$(7.10.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty'^{(1)}\, y^{(1)}_{(\infty,1)} = e^{-\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(2)}, \qquad \chi_\infty'^{(2)}\, y^{(2)}_{(\infty,1)} = e^{\frac{i\pi\delta_\infty}{2}}\, v_4^{(1)}, \\ \chi_1'^{(1)}\, y^{(1)}_{(1,\infty)} = v_1^{(1)}, \qquad \chi_1'^{(2)}\, y^{(2)}_{(1,\infty)} = v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}\, y^{(1)}_{(0,-\infty)} = e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_1-\delta_0)}\, v_2^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}\, y^{(2)}_{(0,-\infty)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(\delta_1-\delta_0)}\, v_2^{(2)}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(\delta_1-\delta_0)}\, v_2^{(1)}\left[\frac{e^{i\pi(\delta_0-\delta_\infty)}+e^{-i\pi\delta_1}}{2\sin\pi\delta_0} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(7.10.2)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = 2e^{i\pi\delta_\infty}\cos\pi\frac{\delta_0-\delta_1-\delta_\infty}{2}\, G_2'(\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(1)} + \\ \qquad + 2i\cos\pi\frac{\delta_0-\delta_1+\delta_\infty}{2}\, G_2'(-\delta_\infty,\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -2ie^{i\pi(\delta_\infty+\delta_1)}\cos\pi\frac{\delta_0+\delta_1-\delta_\infty}{2}\, G_2'(\delta_\infty,-\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(1)} + \\ \qquad + 2e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\frac{\delta_0+\delta_1+\delta_\infty}{2}\, G_2'(-\delta_\infty,-\delta_1,\delta_0)\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

$$(7.10.3)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_2(-\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, v_1^{(1)} - i\, G_2(\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, v_1^{(2)}; \\ v_3^{(1)} = G_2(\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\, v_4^{(1)} + i\, G_2(-\delta_\infty,\delta_0,\delta_1)\, v_4^{(2)}. \end{cases}$$

$$(7.10.4)\quad \begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = i\, G_2(\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_1^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_0,-\delta_1,\delta_\infty)\, e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(1)}(\xi) = -i\, G_2(\delta_0,-\delta_\infty,\delta_1)\, e^{-\left(\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1+\delta_0)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(2)}(\xi) = G_2(\delta_0,\delta_\infty,\delta_1)\, e^{-\left(\xi-\frac{i\pi}{2}(\delta_\infty-\delta_1+\delta_0)\right)}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

gültig in S_2 und S_3.

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(7.10.5)\qquad v_2^{(1)} = H_2(\delta_0,\delta_1,\delta_\infty)\, e^{\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \quad \text{in } \tilde{S}_2.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(7.10.6)\quad \begin{cases} \tilde{v}_1^{(1)} = 2e^{i\pi\delta_1}(\cos\pi(\delta_0-\delta_1)+\cos\pi\delta_\infty)\, H_2'(\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, \tilde{v}_1^{(1)} - \\ \qquad - \frac{1}{\sin\pi\delta_1}(e^{-i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0+\cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ \tilde{v}_1^{(2)} = \frac{1}{\sin\pi\delta_1}(e^{i\pi\delta_1}\cos\pi\delta_0+\cos\pi\delta_\infty)\, \tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad + 2e^{i\pi\delta_1}(\cos\pi(\delta_0+\delta_1)+\cos\pi\delta_\infty)\, H_2'(-\delta_1,\delta_0,\delta_\infty)\, \tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

§ 8. Die Whittakersche Differentialgleichung. Allgemeines

8.1. Die Whittakersche Differentialgleichung[17]) lautet in unserer Schreibweise:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-(2m)^2}{x^2} - 1 + \frac{4k}{x}\right], \tag{8.1.1}$$

Sie entsteht bekanntlich durch Konfluenz aus der Riemannschen, indem die Stelle $x=1$ in die Stelle $x=\infty$ hineinrückt und die zugehörigen Winkelgrößen δ_1 und δ_∞ unendlich groß werden; die Differenz $\delta_\infty - \delta_1$ bleibt dabei endlich und wird gleich $2k$ gesetzt. Die Stelle $x=0$ bleibt Stelle der Bestimmtheit, und es wird die zugehörige Winkelgröße $\delta_0 = 2m$ gesetzt. Dementsprechend sei $2m$ positiv reell oder positiv imaginär; ganzzahlig reelle Werte $2m$ seien aus denselben Gründen wie in 4.1 ausgeschlossen.

Die Größe k muß, da wir reelle Koeffizienten der Differentialgleichung vorausgesetzt hatten, reell sein. Imaginäre Werte k berücksichtigen wir, indem wir (8.1.1) durch die Transformation

$$x \to ix, \quad k \to ik \tag{8.1.2}$$

in eine Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1-(2m)^2}{x^2} + 1 - \frac{4k}{x}\right] \tag{8.1.3}$$

umformen.

8.2. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung (8.1.1), also den Fall *k reell*. Die zu der Stelle $x=0$ gehörigen kanonischen Lösungen werden gewöhnlich mit $M_{k,\pm m}(x)$ bezeichnet; ihre Reihenentwicklungen lauten:

$$\begin{cases} M_{k,m}(x) = x^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{x}{2}} F_1\left(\frac{1}{2}+m-k, 1+2m; x\right) \\ M_{k,-m}(x) = x^{\frac{1}{2}-m} e^{-\frac{x}{2}} F_1\left(\frac{1}{2}-m-k, 1-2m; x\right). \end{cases} \tag{8.2.1}$$

Dabei ist $F_1(a, b; x)$ die konfluente hypergeometrische Reihe

$$F_1(a, b; x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{b(b+1)\dots(b+\nu-1)} \frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Die Stelle $x=\infty$ ist wesentlich singuläre Stelle der Differentialgleichung (8.1.1). In ihrer Umgebung werden an Stelle der kanonischen Lösungen solche Lösungen betrachtet, die sich durch besonderes asymptotisches Verhalten auszeichnen. Es sind dies die Funktionen $W_{k,m}(x)$, die durch

$$W_{k,m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} M_{k,m}(x) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} M_{k,-m}(x) \tag{8.2.2}$$

definiert werden und für die im Winkelraum $|\arc x| < \frac{3\pi}{2}$ die asymptotische Entwicklung gilt:

$$W_{k,m}(x) \sim e^{-\frac{x}{2}} x^k \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{-\nu}}{\nu!} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left[m^2 - \left(k + \tfrac{1}{2} - \mu\right)^2\right]\right). \tag{8.2.3}$$

[17]) Siehe etwa BUCHHOLZ [2], insbesondere 1—31.

Die durch (8.2.1), (8.2.2) definierten Funktionselemente betrachten wir zunächst auf der positiv reellen x-Achse; dementsprechend seien wieder für die Potenzen von x die Hauptwerte gewählt. Von dort aus lassen sie sich eindeutig überallhin in die obere Halbebene analytisch fortsetzen. Die bei Fortsetzung in die untere Halbebene entstehenden Funktionszweige mögen in Anlehnung an unsere bisherige Bezeichnungsweise $\tilde{M}_{k,m}(x)$, $\tilde{M}_{k,-m}(x)$, $\tilde{W}_{k,m}(x)$ genannt werden.

Durch die Transformation

$$x \to -x, \quad k \to -k \tag{8.2.4}$$

geht die Differentialgleichung (8.1.1) in sich über. Es sind daher $M_{-k,m}(-x)$, $M_{-k,-m}(-x)$, $W_{-k,m}(-x)$ Lösungen von (8.1.1), die jetzt auf der negativ reellen x-Achse definiert sind und von dort aus in die obere Halbebene fortgesetzt werden können. Die Funktionszweige, die bei Fortsetzung in die untere Halbebene entstehen, mögen wieder mit $\tilde{M}_{-k,m}(-x)$, $\tilde{M}_{-k,-k}(-x)$, $\tilde{W}_{-k,m}(-x)$ bezeichnet werden.

Wie in (4.2.3) gilt die Relation

$$\begin{cases} M_{-k,m}(-x) = e^{-i\pi(\frac{1}{2}+m)} M_{k,m}(x) \\ M_{-k,-m}(-x) = e^{-i\pi(\frac{1}{2}-m)} M_{k,-m}(x). \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Daneben betrachten wir die Relationen zwischen den $W_{\pm k,m}(\pm x)$ und den $\tilde{W}_{\pm k,m}(\pm x)$ bei Fortsetzung um die Stelle $x=0$ herum. Es gilt hier im Intervall $(-\infty, 0)$

$$W_{k,m}(x) = e^{2\pi i k}\tilde{W}_{k,m}(x) + \frac{2\pi i e^{i\pi k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\,(\Gamma\frac{1}{2}+m-k)}\tilde{W}_{-k,m}(-x), \tag{8.2.6}$$

und im Intervall $(0, \infty)$

$$W_{-k,m}(-x) = -\frac{2\pi i e^{i\pi k}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)}\tilde{W}_{k,m}(x) + e^{2\pi i k}\tilde{W}_{-k,m}(-x). \tag{8.2.7}$$

8.3. k imaginär. Wegen (8.1.2) lassen sich auch die Lösungen der Differentialgleichung (8.1.3) durch die Whittakerfunktionen $M_{\pm k,\pm m}$ und $W_{\pm k,m}$ ausdrücken. Wir definieren — zunächst für die positiv reelle x-Achse:

$$\begin{cases} M_{+}^{(1)}(x) = e^{-\frac{i\pi}{4}(+2m)} M_{ix,m}(ix), \\ M_{+}^{(2)}(x) = e^{-\frac{i\pi}{4}(+2m)} M_{ix,-m}(ix), \end{cases} \tag{8.3.1}$$

$$\begin{cases} W_{+}^{(1)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}x} W_{ix,m}(ix), \\ W_{+}^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}x} W_{-ix,m}(-ix). \end{cases} \tag{8.3.2}$$

Dabei seien zur eindeutigen Bestimmung dieser Lösungen die $M_{ix,\pm m}(ix)$ und $W_{ix,m}(ix)$ zunächst für positiv reelle Argumente — d.h. auf der negativ imaginären x-Achse — gemäß (8.2.1), (8.2.2) gebildet und von dort auf dem

kürzesten Wege zur positiv reellen x-Achse fortgesetzt. Entsprechend werde $W_{-i\varkappa,m}(-ix)$ auf der positiv imaginären x-Achse gebildet und von dort ebenfalls auf dem kürzesten Wege zur positiv reellen x-Achse fortgesetzt.

Auf Grund der Transformation (8.2.4) können wir entsprechende Lösungen von (8.1.3) auch auf der negativ reellen x-Achse definieren. Es sei

$$(8.3.3)\quad M_-^{(1)}(m,\varkappa;x) = M_+^{(1)}(m,-\varkappa;-x) \quad M_-^{(2)}(m,\varkappa;x) = M_+^{(2)}(m,-\varkappa;-x),$$

$$(8.3.4)\quad W_-^{(1)}(m,\varkappa;x) = W_+^{(1)}(m,-\varkappa;-x) \quad W_-^{(2)}(m,\varkappa;x) = W_+^{(2)}(m,-\varkappa;-x).$$

Wie in (4.1.3), (4.1.4) sollen die den $M_\pm^{(1)(2)}$ und $W_\pm^{(1)(2)}$ beigefügten m und $\varkappa$ nur die Art der Transformation andeuten; im folgenden werden wir sie wieder fortlassen.

Zwischen den $W_+^{(1)(2)}$ und $M_+^{(1)(2)}$ gilt die folgende Relation

$$(8.3.5)\quad \begin{cases} W_+^{(1)} = \dfrac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-i\varkappa)}\, e^{\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{2}+m-i\varkappa)} M_+^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-i\varkappa)}\, e^{\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{2}-m-i\varkappa)} M_+^{(2)}, \\ W_+^{(2)} = \dfrac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m+i\varkappa)}\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{2}+m+i\varkappa)} M_+^{(1)} + \\ \qquad + \dfrac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+i\varkappa)}\, e^{-\frac{i\pi}{2}(\frac{1}{2}-m+i\varkappa)} M_+^{(2)}. \end{cases}$$

Die entsprechende Relation zwischen den $M_-^{(1)(2)}$ und $W_-^{(1)(2)}$ erhält man, indem man in (8.3.5) überall $\varkappa$ durch $-\varkappa$ ersetzt.

Weiter gilt

$$(8.3.6)\quad W_+^{(1)} = \frac{2\pi i}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-i\varkappa)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-i\varkappa)} W_-^{(1)} + e^{-\pi\varkappa} W_-^{(2)}, \quad W_+^{(2)} = e^{\pi\varkappa} W_-^{(1)}.$$

Schließlich notieren wir noch die Umlaufsrelation der W_+; der Formel (8.2.6) entspricht hier

$$(8.3.7)\quad \begin{cases} W_+^{(1)} = -(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{W}_+^{(1)} + \dfrac{2\pi i e^{\pi\varkappa}}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-i\varkappa)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-i\varkappa)}\,\tilde{W}_+^{(2)}, \\ W_+^{(2)} = \dfrac{2\pi i e^{\pi\varkappa}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+i\varkappa)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+i\varkappa)}\,\tilde{W}_+^{(1)} + e^{2\pi\varkappa}\tilde{W}_+^{(2)}. \end{cases}$$

8.4. Liouville-Transformationen. Zur Vorbereitung der asymptotischen Integration üben wir wieder auf die Differentialgleichungen (8.1.1) und (8.1.3) die Liouville-Transformation aus. Ähnlich wie in 4.3 kommen — auf Grund der Bedingungen in 2.2 — für $\varrho^2\varphi(x)$ nur eine beschränkte Anzahl von rationalen Funktionen in Betracht. Es bestehen die folgenden Möglichkeiten:

$$(8.4.1)\quad \begin{cases} \varrho^2\varphi(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{k}{x} & \text{für (8.1.1)} \\ \qquad\quad = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\varkappa}{x} & \text{für (8.1.3)}, \end{cases}$$

$$(8.4.2)\qquad \begin{cases} \varrho^2 q(x) = \frac{1}{4} - \frac{k}{x} + \frac{m^2}{x^2} & \text{für (8.1.1)} \\ \qquad\quad = -\frac{1}{4} + \frac{\varkappa}{x} + \frac{m^2}{x^2} & \text{für (8.1.3).} \end{cases}$$

Dabei entspricht (8.4.1) der Transformation (4.3.2) und (8.4.2) der Transformation (4.3.3) von 4.3. Wie dort hat auch hier ϱ nur die Bedeutung eines Maßes für die Güte der Näherung bei asymptotischer Integration. So ist also die Transformation (8.4.1) angebracht, wenn k bzw. $\varkappa$ groß ist, während m klein bleibt. Dagegen wird (8.4.2) anzuwenden sein, wenn m und k bzw. $\varkappa$ groß ist[18]; dabei sind wieder nur solche Näherungen miteinander vergleichbar, bei denen m und k bzw. $\varkappa$ in einem festen Verhältnis zueinander stehen.

Der Untersuchung der Whittakerschen Differentialgleichung auf Grund dieser Liouville-Transformationen sind die beiden folgenden Paragraphen gewidmet. Dabei sollen die vorbereitenden Betrachtungen und Festsetzungen von 4.3 bis 4.6 auch für diese Untersuchungen maßgebend sein.

§ 9. Die Liouville-Transformation (8.4.1)

9.1. k reell. Wir müssen voraussetzen, daß $m^2 \leqq \frac{1}{16}$ ist. Wegen (8.2.4) können wir k als positiv reell voraussetzen. Auch den Fall $k = 0$ dürfen wir ausschließen; in diesem Fall geht (8.4.1) in die triviale Transformation $\xi(x) = -\frac{x}{2}$ über. Die Whittakersche Differentialgleichung ist dann die bereits in 3.5 betrachtete Differentialgleichung (3.16).

Ist $k \neq 0$, so wird das Integral $\xi(x)$ mit $x_0 = 0$ als unterer Grenze ausgewertet:

$$(9.1.1)\qquad \xi(x) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{x(x-4k)} + k\log\left(2x - 4k + \sqrt{x(x-4k)}\right) - k\log(-4k).$$

Die Vorzeichen der Wurzeln und Logarithmen seien wie bisher festgelegt, nämlich positiv reell für $x \to \infty$ auf der positiv reellen Achse.

Das ξ-Polygon erhält dann die Gestalt von Fig. 18. Es kann als Grenzfall von Fig. 5 in 6.4 aufgefaßt werden[19], mit $\delta_1 \to \infty$, $\delta_\infty \to \infty$ und $\delta_\infty - \delta_1 = 2k$. Dementsprechend ist auch die Numerierung der Teilbereiche gewählt, nur werden aus den Halbstreifen S_3, S_4 in Fig. 5 die Quadranten Q_3, Q_4 in Fig. 18.

Die transformierte Differentialgleichung, die sich nicht explizit angeben läßt, hat Singularitäten bei $\xi(0) = 0$ mit dem Index $2m$ und bei $\xi(4k) = -i\pi k$ mit dem Index $\frac{1}{3}$.

Wie bei der Riemannschen Differentialgleichung können wir auch hier die asymptotische Abschätzung kanonischer Lösungen und Fortsetzungs-

---

[18] Genauer erhalten wir bei dieser Liouville-Transformation asymptotische Abschätzungen für $m \to \infty$ bei festem k/m bzw. $\varkappa/m$. Dabei kann k/m beliebig klein sein, auch $k = 0$ (bzw. $\varkappa = 0$) sind zugelassen.

[19] Die Vorzeichen der Wurzeln im Integral (9.1.1) wurden so gewählt, daß es unmittelbar als Grenzfall des Integrals (6.2.1) aufgefaßt werden kann.

relationen angeben. So wird für große k

$$\text{(9.1.2)} \qquad \begin{cases} \left[\frac{x-4k}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{k(1-\log k)}\, W_{k,m}(x) = v_3^{(1)}, \\ \left[\frac{x-4k}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-k(1-\log k)}\, W_{-k,m}(-x) = v_1^{(2)} \end{cases}$$

und es gilt auf $\mathfrak{C}_1$[20]:

$$\text{(9.1.3)} \qquad \begin{cases} v_3^{(1)} = i\,\tilde{v}_3^{(2)}, \\ v_3^{(2)} = i\,\tilde{v}_3^{(1)} + H_3(k,m)\,\tilde{v}_3^{(2)}, \end{cases}$$

und auf $\mathfrak{C}_2$:

$$\text{(9.1.4)} \qquad \begin{cases} v_4^{(1)} = e^{2\pi i k}\,\tilde{v}_4^{(1)} + 2i(\cos 2\pi k + \cos 2\pi m)\, H_3^{-1}(k,m)\,\tilde{v}_4^{(2)} \\ v_4^{(2)} = e^{-2\pi i k}\,\tilde{v}_4^{(1)}. \end{cases}$$

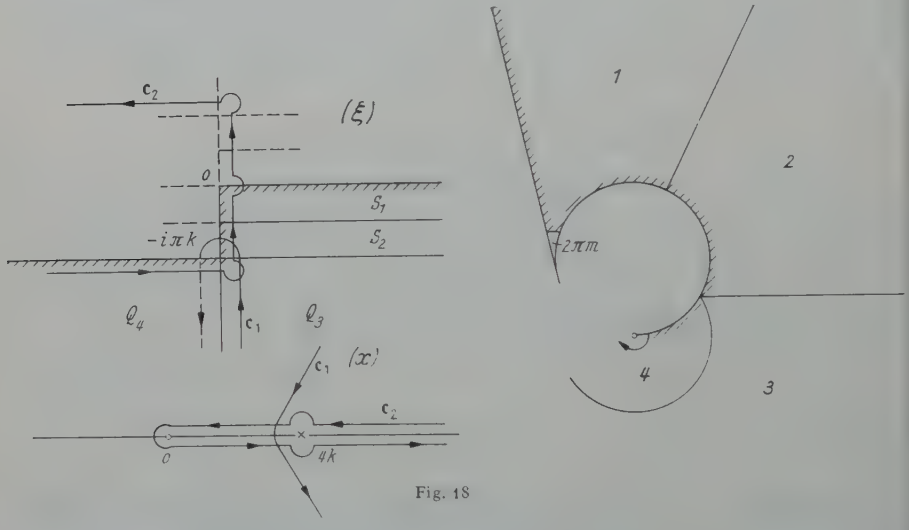

Fig. 18

Dabei soll $H_3(k,m)$ der folgende Ausdruck bedeuten:

$$\text{(9.1.5)} \qquad H_3(k,m) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}\, e^{-2k(1-\log k)}.$$

Die Konstruktion des Kreisbogenpolygons aus dem ξ-Polygon zeigt Fig. 18. Auch dieses außergewöhnliche Polygon läßt sich als Grenzfall eines gewöhnlichen — etwa von Fig. 5 — Kreisbogendreiecks auffassen. Den beiden Ecken mit den unendlich großen Winkeln δ_1 und δ_∞ entsprechen logarithmische Windungspunkte. Jeder diese beiden Windungspunkte verbindender Kreisbogen bildet mit den beiden Seiten des Polygons Winkel, deren Differenz

[20]) Diese Relationen — und entsprechend auch (9.2.4), (9.2.5) — gelten natürlich allgemein, d.h. auch für beliebig kleine k. Sie sind daher besonders wichtig, weil die asymptotische Integration mit den hier betrachteten Hilfsfunktionen auch die Untersuchung solcher Grenzübergänge möglich macht, bei denen ein Pol und eine Nullstelle von $\varphi(x)$ einander beliebig nahe kommen.

$(\delta_\infty - \delta_1)\pi = 2k\pi$ beträgt. Die dritte Ecke des Polygons hat einen Innenwinkel der Größe $2m\pi$.

9.2. k imaginär, $k = i\varkappa$. Wegen (8.2.4) können wir $\varkappa > 0$ voraussetzen. Ferner sei wieder $m^2 \leq \frac{1}{16}$.

Das Integral $\xi(x)$ wird jetzt ausgewertet

$$\text{(9.2.1)} \quad \begin{cases} \xi(x) = -\frac{i}{2}\sqrt{x(x-4\varkappa)} + i\varkappa \log(2x - 4\varkappa + 2\sqrt{x(x-4\varkappa)} - \\ \qquad - i\varkappa \log(-4\varkappa). \end{cases}$$

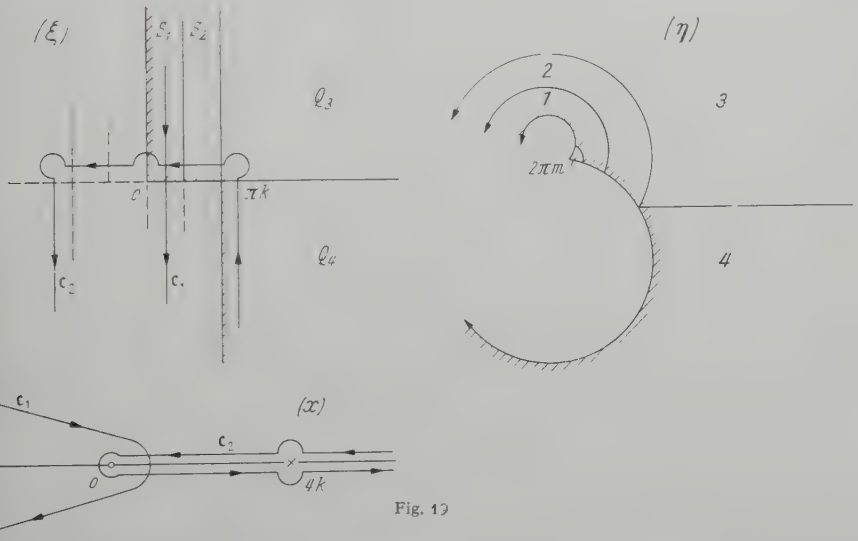

Fig. 19

Das ξ-Polygon ist das gleiche wie in 9.1, nur um $\pi/2$ gedreht. Die Funktionen $W_+^{(1)(2)}$ lassen sich wie folgt abschätzen:

$$\text{(9.2.2)} \quad \begin{cases} \left[\frac{x-4\varkappa}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{i\varkappa(1-\log\varkappa)} W_+^{(1)} = v_4^{(1)}, \\ \left[\frac{x-4\varkappa}{x}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-i\varkappa(1-\log\varkappa)} W_+^{(2)} = v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$\text{(9.2.3)} \quad \begin{cases} v_3^{(1)} = v_4^{(1)} - i H_3(-i\varkappa, m)\, v_4^{(2)}, \\ v_3^{(2)} = v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$\text{(9.2.4)} \quad \begin{cases} v_1^{(1)} = H_3(-i\varkappa, m)\, \tilde{v}_1^{(1)} - i(2\cos 2\pi m + e^{-2\pi\varkappa})\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = i e^{-2\pi\varkappa} \tilde{v}_1^{(1)} + H_3(i\varkappa, m)\, \tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$\text{(9.2.5)} \quad \begin{cases} v_4^{(1)} = -(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\, \tilde{v}_4^{(1)} + i e^{2\pi\varkappa} H_3(-i\varkappa, m)\, \tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = i e^{2\pi\varkappa} H_3(i\varkappa, m)\, \tilde{v}_4^{(1)} + e^{2\pi\varkappa} \tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

§ 10. Die Liouville-Transformation (8.4.2)

10.1. k reell, Allgemeines. Wie erwähnt, ist diese Transformation anzuwenden, wenn m groß ist, dagegen brauchen wir über k keine besonderen Voraussetzungen zu machen; nur wenn wir die Näherungen miteinander vergleichen wollen, müssen k und m in einem festen Verhältnis zueinander stehen. Insbesondere ist auch der Fall $k=0$ zugelassen.

$\varphi(x)$ hat die beiden — eventuell zusammenfallenden Nullstellen bei

$$x = s_{1,2} = 2k \pm 2\sqrt{k^2 - m^2}.$$

$\sqrt{k^2-m^2}$ sei positiv reell oder positiv imaginär angenommen; sie hat dieselbe Bedeutung wie $\sqrt{\Delta}$ in 7.1.

Ist $k^2 \neq m^2$, so läßt sich $\xi(x)$ mit $x_0 = s_1$ als unterer Grenze folgendermaßen auswerten:

$$(10.1.1)\quad \begin{cases} \xi(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{(x-s_1)(x-s_2)} + \\ + k\left[\log\left(2x - 4k + 2\sqrt{(x-s_1)(x-s_2)}\right) - \log 4\sqrt{k^2-m^2}\right] + \\ + \sqrt{m^2}\left[\log\left(\frac{2}{x} - \frac{k}{m^2} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{s_1}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{s_2}\right)}\right) - \log -\frac{\sqrt{k^2-m^2}}{m^2}\right]. \end{cases}$$

Für positiv reelle x und $x \to \infty$ bzw. $x \to 0$ mögen Wurzeln und Logarithmen wie bisher positiv reelle Werte annehmen. $\sqrt{m^2}$ sei der Wert von $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4kx+4m^2}$ an der Stelle $x=0$ bei analytischer Fortsetzung in der — eventuell aufgeschnittenen — oberen Halbebene.

Die transformierte Differentialgleichung hat singuläre Stellen bei $\xi(s_1)=0$ und $\xi(s_2)$. Liegen die Nullstellen getrennt, $k^2 \neq m^2$, so haben diese Singularitäten den Index $\frac{1}{3}$, fallen sie zusammen, so hat die Singularität den Index $\frac{1}{4}$ (vgl. 7.1).

Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. *m reell, $m^2 < k^2$.*
2. *m reell, $m^2 = k^2$.*
3. *m reell, $k^2 < m^2$.*
4. *m imaginär.*

In den Fällen 1. und 2. wollen wir $k>0$ voraussetzen, was wegen (8.2.4) ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist. In den Fällen 3. und 4. ist diese Einschränkung nicht nötig.

Die hier aufgeführten Fälle sind Grenzfälle der in 7.3 bis 7.5 und in 7.9 untersuchten Riemannschen Differentialgleichung. Dies gilt insbesondere auch für die zugehörigen ξ-Polygone; wir werden daher auch dieselbe Einteilung und Numerierung wählen, wobei allerdings statt eines Halbstreifens S_ν ein Quadrant Q_ν und statt eines Rechtecks R_μ ein Halbstreifen S_μ auftreten kann. Auch die im folgenden berechneten Formeln lassen sich größtenteils aus den in § 7 abgeleiteten durch Grenzübergang gewinnen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die im folgenden definierten Lösungen der Whittakerschen Differentialgleichung als Hilfsfunktionen zur asymptotischen Integration der in § 7 transformierten Riemannschen Differentialgleichung herangezogen werden können. Auf diese Weise läßt sich z.B. der Übergang von 7.2 über 7.3 nach 7.4 beherrschen, was mit Hilfe von Bessel-Funktionen als Hilfsfunktionen nicht möglich ist. Der gleiche Zusammenhang besteht übrigens auch zwischen den in § 6 und § 9 behandelten Differentialgleichungen.

10.2. Zur Vereinfachung der Formeln führen wir wieder einige Hilfsgrößen ein. Zunächst sei

$$c_4^{\infty}(k,m) = -k + \frac{k+m}{2}\log(k+m) + \frac{k-m}{2}\log(k-m).$$

$$c_4'^{\infty}(k,m) = -k + \frac{m+k}{2}\log(m+k) - \frac{m-k}{2}\log(m-k).$$

$$c_4^{0}(k,m) = 2m\log 2m - m - \frac{m+k}{2}\log(m+k) - \frac{m-k}{2}\log(m-k).$$

$$c_4'^{0}(k,m) = 2m\log 2m - m - \frac{k+m}{2}\log(k+m) + \frac{k-m}{2}\log(k-m).$$

Die Logarithmen seien wie bisher festgelegt, d.h.

$$|\Im(\log\ldots)| < \pi.$$

Mit diesen Größen bilden wir

$$G_4(k,m) = \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}\exp\left[\frac{1}{2}\log 2m + c_4^{\infty}(k,m) - c_4'^{0}(k,m)\right].$$

$$G_4'(k,m) = \frac{\Gamma(2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\log 2m - c_4^{\infty}(k,m) - c_4'^{0}(k,m)\right].$$

$$H_4^{\infty}(k,m) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}\,e^{2c_4^{\infty}(k,m)},$$

$$H_4'^{\infty}(k,m) = \frac{1}{H_4^{\infty}(k,m)},$$

$$H_4''^{\infty}(k,m) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\,e^{-2c_4'^{\infty}(k,m)},$$

$$H_4^{0}(k,m) = \frac{\Gamma(2m)\,\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\,e^{-2c_4^{0}(k,m)}.$$

$$H_4'^{0}(k,m) = \frac{\Gamma(2m)\,\Gamma(1+2m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)}{2\pi\,\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}\,e^{-2c_4'^{0}(m,k)}.$$

Den Größen $\chi_{\alpha}^{(i)}$ in 7.2 entsprechen dann die folgenden Ausdrücke:

$$\chi_{\infty}^{(1)}(k) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-c_4^{\infty}(k,m)},$$

$$\chi_{0}^{(1)}(k) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{4m^2x^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-c_4^{0}(k,m)}.$$

Die zugehörigen Ausdrücke $\chi_\alpha^{(2)}(k)$ werden wieder mit $e^{+c_4^\alpha(k,m)}$, die $\chi'^{(i)}_\alpha(k)$ mit $c_4'^\alpha(k,m)$ gebildet.

10.3. m reell, $m^2 < k^2$. Es wird $0 < s_2 < s_1$ und $\sqrt{m^2} = -m$. Ferner ist $\xi(s_2) = i\pi(k-m)$.

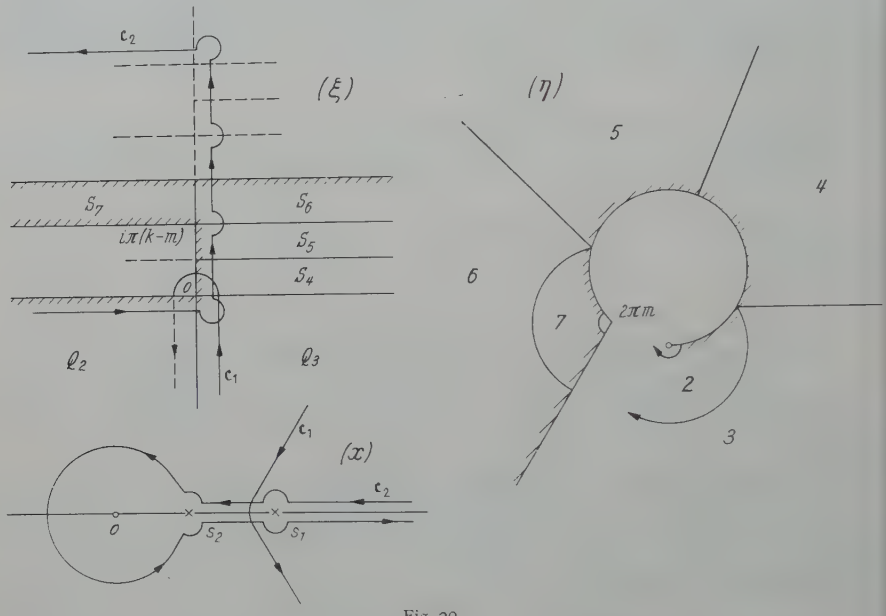

Fig. 20

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.3.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}(k)\, W_{k,m}(x) = v_2^{(1)}, \quad \chi_\infty^{(2)}(k)\, W_{-k,m}(-x) = e^{k\pi i} v_2^{(2)}, \\ \chi_0'^{(1)}(k)\, M_{k,m}(x) = v_7^{(1)}, \\ \chi_0'^{(2)}(k)\, M_{k,-m}(x) = v_7^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + v_7^{(1)}\left[\frac{e^{-2\pi i m}}{2H_4'^0(k,m)\sin 2\pi m} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.3.2)\quad \begin{cases} v_6^{(2)}(\xi) = G_4(k,m)\, e^{-(\xi - i\pi(k-m))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_2^{(1)}(\xi) = 2i\cos\pi(k-m)\, G_4'(k,m)\, e^{-(\xi - i\pi(k-m))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ \qquad\qquad \text{in } S_i. \end{cases}$$

$$(10.3.3)\quad v_7^{(1)} = e^{-i\pi(k-m)} G_4(k,m)\, v_2^{(1)} - 2i\cos\pi(k-m)\, G_4'(k,m)\, v_2^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(10.3.4)\quad v_3^{(1)} = i\tilde{v}_3^{(2)} v, \qquad v_3^{(2)} = i\tilde{v}_3^{(1)} + H_4^\infty(k,m)\,\tilde{v}_3^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(10.3.5)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = e^{2\pi i k}\,\tilde{v}_2^{(1)} + 2i\,(\cos 2\pi k + \cos 2\pi m)\,H_4'^{\infty}(k,m)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = e^{-2\pi i k}\,\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

10.4. m **reell,** $m^2 = k^2$. Alle Formeln von 10.3 bis auf (10.3.4) bleiben gültig. Für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$ gilt:

$$(10.4.1)\quad \begin{cases} v_3^{(1)} = -\tilde{v}_3^{(1)}, \\ v_3^{(2)} = i\,H_4^{\infty}(k,m)\,\tilde{v}_3^{(1)} - \tilde{v}_3^{(2)}. \end{cases}$$

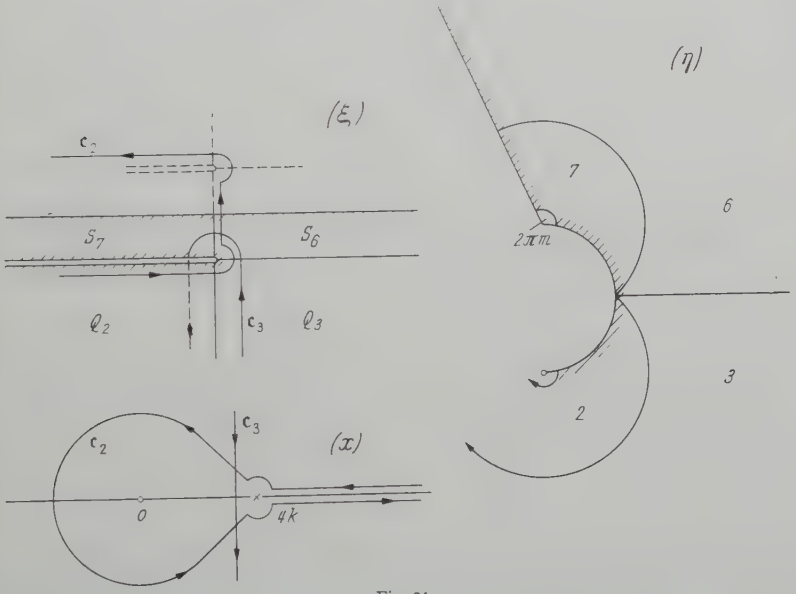

Fig. 21

10.5. m **reell,** $k^2 < m^2$. s_1 und s_2 sind konjugiert komplex. Die obere x-Halbebene werde zwischen s_1 und der positiv reellen Achse aufgeschnitten, so daß das in Fig. 22 dargestellte ξ-Polygon entsteht.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.5.1)\quad \begin{cases} \chi_{\infty}'^{(1)}(k)\,W_{k,m}(x) = e^{-\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_2^{(1)}, \\ \chi_{\infty}'^{(2)}(k)\,W_{-k,m}(-x) = e^{\frac{i\pi}{2}(m+k)}\,v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(k)\,M_{k,m}(x) = e^{\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_7^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}(k)\,M_{k,-m}(x) = e^{-\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_7^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad + e^{\frac{i\pi}{2}(m-k)}\,v_7^{(1)}\left[\frac{e^{-\pi i m}\cos\pi(m-k)}{H_4^0(k,m)\sin 2\pi m} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.5.2)\qquad \begin{cases} v_3^{(1)}(\xi) = i\,G_4(-k,m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_3^{(2)}(\xi) = G_4(k,m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ \qquad\qquad \text{in } S_7 \text{ und } S_8. \end{cases}$$

$$(10.5.3)\qquad v_7^{(1)} = G_4(k,m)\,v_3^{(1)} - i\,G_4(-k,m)\,v_3^{(2)}.$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(10.5.4)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = e^{i\pi(k+m)}\,\tilde{v}_2^{(1)} + 2i\cos\pi(k+m)\,H_4''^{\infty}(k,m)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = e^{-i\pi(k+m)}\,\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

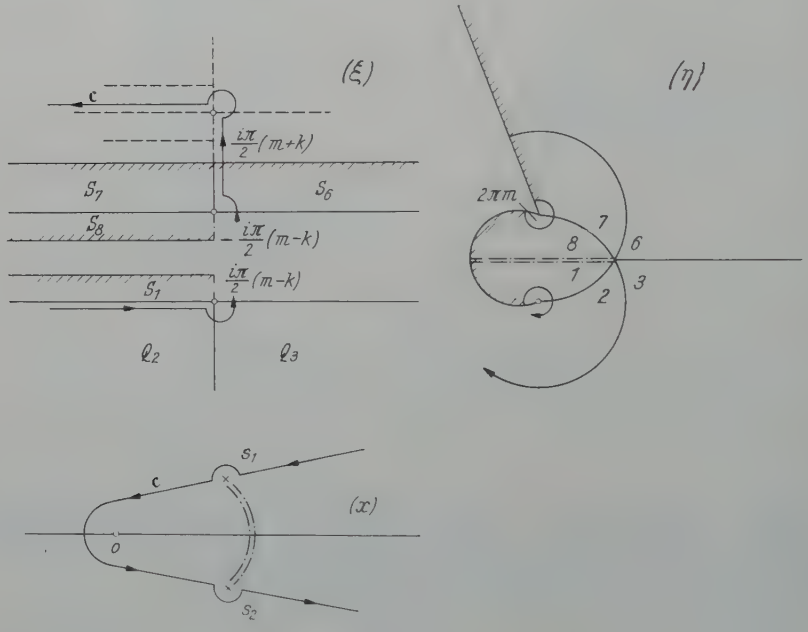

Fig. 22

10.6. m imaginär. Hier ist $s_2<0<s_1$ und $\sqrt{m^2}=m$.
Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.6.1)\qquad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}(k)\,W_{k,m}(x) = v_1^{(1)}, \quad \chi_\infty^{(2)}(k)\,W_{-k,m}(-x) = e^{i\pi k}\,v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(k)\,M_{k,m}(x) = e^{\frac{i\pi}{2}(k-m)}\,v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(2)}(k)\,M_{k,-m}(x) = e^{-\frac{i\pi}{2}(k-m)}\,v_2^{(1)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$\text{(10.6.2)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = G_4(-k, m)\, v_2^{(1)} + i\, G_4(-k, -m)\, v_2^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -i\, e^{i\pi(m-k)}\, G_4(k, m)\, v_2^{(1)} + G_4(k, -m)\, v_2^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$\text{(10.6.3)} \qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = e^{-2\pi i m}\, H_4^{\infty}(-k, m)\, \tilde{v}_1^{(1)} - i\, e^{2\pi i k}\, \tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -i\, e^{-2\pi i k}\, \tilde{v}_1^{(1)}. \end{cases}$$

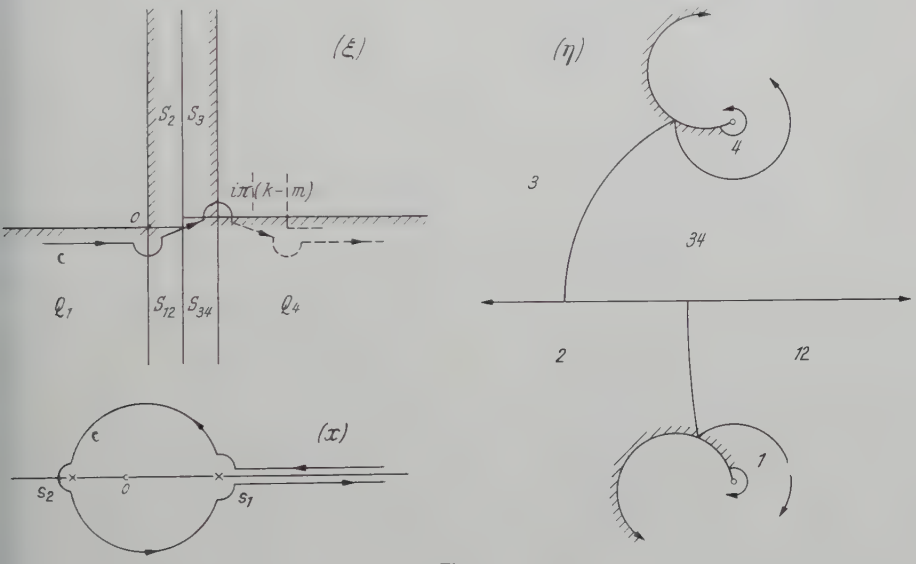

Fig. 23

10.7. k imaginär, $k = i\varkappa$, Allgemeines. Die hier anzustellenden Betrachtungen sind im wesentlichen dieselben wie in 10.1; wir haben nur überall $\varkappa$ statt k und $-m^2$ statt m^2 zu setzen und $\xi(x)$ mit dem Faktor i zu multiplizieren. Dementsprechend sind die zu imaginären k gehörigen ξ-Polygonen dieselben, wie bei reellen k nur um $\pi/2$ gedreht.

Die Nullstellen s_1 und s_2 von $\varphi(x)$ liegen bei

$$x = s_{1,2} = 2\varkappa \pm 2\sqrt{\varkappa^2 + m^2}.$$

Den Fällen 1. bis 4. in 10.1 entsprechen die folgenden Fälle bei imaginärem k:

1. *m imaginär, $|m|^2 < \varkappa^2$.*
2. *m imaginär, $m^2 = -\varkappa^2$.*
3. *m imaginär, $\varkappa^2 < |m|^2$.*
4. *m reell.*

In den Fällen 1. und 2 muß $\varkappa$ positiv reell vorausgesetzt werden, in den Fällen 3. und 4. kann $\varkappa$ wieder beliebig reell sein. Wie in 10.1 sind diese Fälle Grenzfälle von 7.6 bis 7.8 und 7.10.

Die in 10.2 eingeführten $\chi_\alpha^{(i)}(k)$ sind für imaginäre k wie folgt abzuändern:

$$\chi_\infty^{(1)}(i\varkappa) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{x^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{-c_4^\infty(i\varkappa, m)},$$

$$\chi_0^{(1)}(i\varkappa) = \left[\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{-4m^2x^2}\right] e^{-c_4^0(i\varkappa, m)}.$$

Entsprechend sind die $\chi_\alpha^{(2)}(i\varkappa)$ und $\chi_\alpha'^{(i)}$ zu bilden.

10.8. m imaginär, $|m|^2 < \varkappa^2$.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.8.1)\quad \begin{cases} \chi_\infty^{(1)}(i\varkappa)\, W_+^{(1)} = e^{\frac{\varkappa\pi}{2}} v_2^{(1)}, \quad \chi_\infty^{(2)}(i\varkappa)\, W_+^{(2)} = e^{-\frac{\varkappa\pi}{2}} v_2^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(i\varkappa)\, M_+^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)} v_7^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}(i\varkappa)\, M_+^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)} v_7^{(2)}. \end{cases}$$

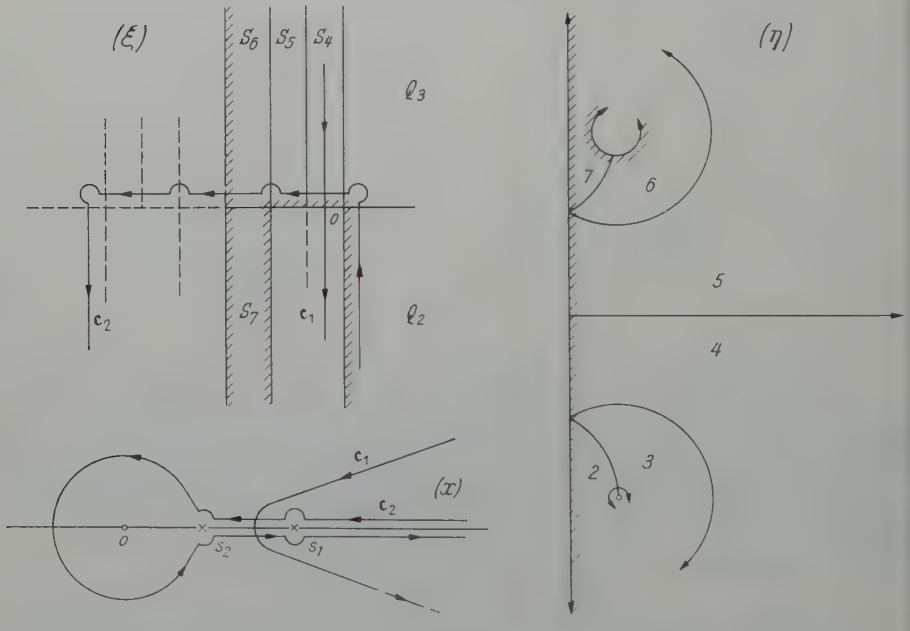

Fig. 24

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.8.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = v_3^{(1)} + i\, H_4^\infty(-i\varkappa, m)\, v_3^{(2)}, \quad v_2^{(2)} = v_3^{(2)}. \\ v_2^{(1)} = -e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(-i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} + i\, e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(-i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\, e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} + e^{-i\pi(i\varkappa - m)} G_4(i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}. \\ v_6^{(1)} = G_4(-i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} - i\, e^{4\pi i m} G_4(-i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\, G_4(i\varkappa, -m)\, v_7^{(1)} + G_4(i\varkappa, m)\, v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_1$:

$$(10.8.3)\quad \begin{cases} v_4^{(1)} = H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_4^{(1)} - i\,e^{-2\pi\varkappa}(2\cos 2\pi m + e^{-2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_4^{(2)}, \\ v_4^{(2)} = i\,\tilde{v}_4^{(1)} + H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}_2$:

$$(10.8.4)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = -(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_2^{(1)} + i\,e^{2\pi\varkappa} H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_2^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = i\,e^{2\pi\varkappa} H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_2^{(1)} + e^{2\pi\varkappa}\tilde{v}_2^{(2)}. \end{cases}$$

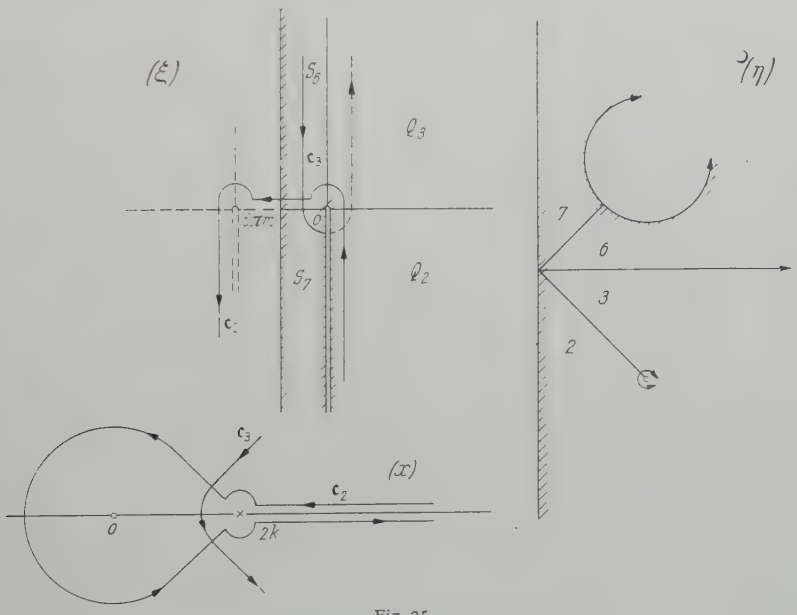

Fig. 25

10.9. m imaginär, $m^2 = -\varkappa^2$. Alle Formeln von 10.8 bis auf (10.8.3) bleiben für diesen Fall gültig. Für die Fortsetzung auf $\mathfrak{C}_3$ gilt:

$$(10.9.1)\quad \begin{cases} v_6^{(1)} = (1 + 2e^{-4\pi\varkappa})\,\tilde{v}_6^{(1)} + i\,H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_6^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\,H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_6^{(1)} - \tilde{v}_6^{(2)}. \end{cases}$$

10.10. m imaginär, $\varkappa^2 < |m|^2$.

Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.10.1)\quad \begin{cases} \chi_{\infty}^{(1)}(i\varkappa)\,W_+^{(1)} = e^{\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)}\,v_1^{(1)}, \\ \chi_{\infty}^{(2)}(i\varkappa)\,W_+^{(2)} = e^{-\frac{i\pi}{2}(i\varkappa - 2m)}\,v_1^{(2)}, \\ \chi_0^{(1)}(i\varkappa)\,M_+^{(1)} = e^{\frac{\pi\varkappa}{2}}\,v_7^{(1)}, \quad \chi_0^{(2)}(i\varkappa)\,M_+^{(2)} = e^{-\frac{\pi\varkappa}{2}}\,v_7^{(2)}. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.10.2)\quad \begin{cases} v_2^{(1)} = v_3^{(1)} + i\,H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,v_3^{(2)}, \\ v_2^{(2)} = v_3^{(2)}. \\ v_6^{(1)} = G_4(-i\varkappa, -m)\,v_7^{(1)} - i\,e^{2\pi i(m+i\varkappa)}\,G_4(-i\varkappa, m)\,v_7^{(2)}, \\ v_6^{(2)} = i\,G_4(i\varkappa, -m)\,v_7^{(1)} + G_4(i\varkappa, m)\,v_7^{(2)}. \end{cases}$$

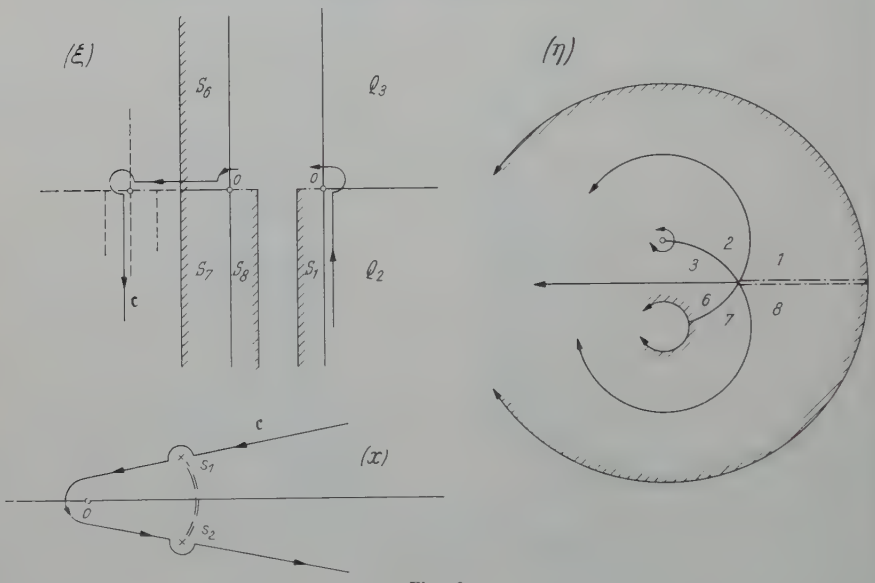

Fig. 26

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(10.10.3)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} = -\,e^{i\pi(m-i\varkappa)}(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_1^{(1)} + \\ \qquad\qquad + i\,e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,H_4^{\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = i\,e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,H_4^{\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(1)} + e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,\tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

10.11. m reell. Asymptotische Abschätzungen:

$$(10.11.1)\quad \begin{cases} \chi_{\infty}'^{(1)}(i\varkappa)\,W_+^{(1)} = e^{-\frac{i\pi m}{2}}\,v_1^{(1)}, \\ \chi_{\infty}'^{(2)}(i\varkappa)\,W_+^{(2)} = e^{\frac{i\pi m}{2}}\,v_1^{(1)}, \\ \chi_0^{(1)}(i\varkappa)\,M_+^{(1)} = e^{\frac{\varkappa\pi}{2}}\,v_2^{(1)}, \\ \chi_0^{(2)}(i\varkappa)\,M_+^{(2)} = e^{-\frac{\varkappa\pi}{2}}\,v_2^{(2)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) + \\ \qquad\qquad + e^{\frac{\pi\varkappa}{2}}\,v_2^{(1)}\left[\frac{e^{\pi\varkappa} + e^{i\pi(i\varkappa - m)}}{2\sin 2\pi m} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]. \end{cases}$$

Fortsetzungsrelationen. Im ξ-Polygon:

$$(10.11.2)\qquad \begin{cases} v_1^{(1)}(\xi) = i\,G_4(-i\varkappa, m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_1^{(2)}(\xi) = G_4(i\varkappa, m)\,e^{-\xi}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(1)}(\xi) = -\,i\,G_4(-i\varkappa, m)\,e^{-(\xi - i\pi(m+i\varkappa))}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \\ v_4^{(2)}(\xi) = G_4(i\varkappa, m)\,e^{-(\xi - i\pi(m+i\varkappa))}\left(1+O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right), \end{cases}$$

alles gültig in S_2 und S_3.

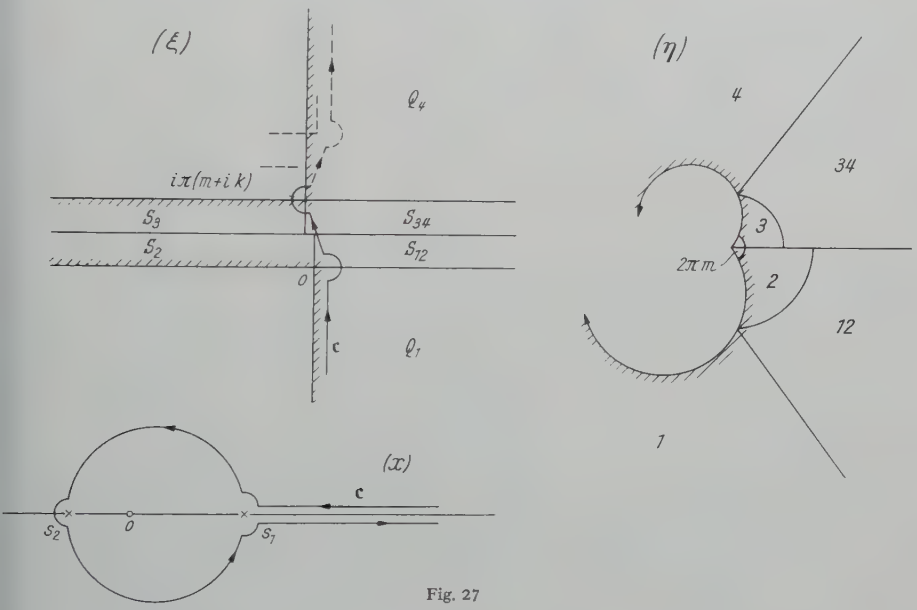

Fig. 27

$$(10.11.3)\qquad \begin{cases} v_2^{(1)} = G_4(i\varkappa, m)\,v_1^{(1)} - i\,G_4(-i\varkappa, m)\,v_1^{(2)}; \\ v_3^{(1)} = G_4(i\varkappa, m)\,v_4^{(1)} + i\,G_4(-i\varkappa, m)\,v_4^{(2)}. \end{cases}$$

$$(10.11.4)\qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = e^{i\pi(m+i\varkappa)}\,v_4^{(1)} + 2i\cos\pi(m+i\varkappa)\,H_4^{\prime\prime\infty}(i\varkappa, m)\,v_4^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = e^{-i\pi(m+i\varkappa)}\,v_4^{(2)}. \end{cases}$$

Auf $\mathfrak{C}$:

$$(10.11.5)\qquad \begin{cases} v_1^{(1)} = (e^{2\pi\varkappa} + e^{2\pi i m})\,H_4^{\prime\prime\infty}(i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(1)} + i\,(2\cos 2\pi m + e^{2\pi\varkappa})\,\tilde{v}_1^{(2)}, \\ v_1^{(2)} = -\,i\,e^{2\pi\varkappa}\tilde{v}_1^{(1)} + (e^{2\pi\varkappa} + e^{2\pi i m})\,H_4^{\prime\prime\infty}(-i\varkappa, m)\,\tilde{v}_1^{(2)}. \end{cases}$$

Literatur

[1] BATEMAN, H.: Higher transcendental functions. New York-Toronto-London 1953. — [2] BUCHHOLZ, H.: Die konfluente hypergeometrische Funktion. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [3] KLEIN, F.: Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Berlin 1933. — [4] KOPPENFELS, W. v.: Beitrag zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. **112**, 24—51 (1936). — [5] SCHILLING, F.: Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen *s*-Funktion. Math. Ann. **44**, 161—260 (1894). — [6] STALLMANN, F.: Zum Parameterproblem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Mitt. Math. Seminar Gießen, H. 43, 1952. — [7] STALLMANN, F.: Untersuchung spezieller Funktionen der Potentialtheorie mit Hilfe der konformen Abbildung. Z. angew. Math. Mechan. **34**, 302—303 (1954).

Mathematisches Institut der Universität Gießen, Johannesstr. 1

(Eingegangen am 3. August 1956)

Stöhr, A.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 77—81 (1957)

Über die Anzahl der Wege in einem gewissen Straßennetz

C. L. Siegel zum 60. Geburtstag

Von
Alfred Stöhr

§ 1

In einer Stadt mögen nordsüdlich und westöstlich verlaufende Straßen ein quadratisches Gitter mit der Maschenweite 1 bilden. Die Straßenecke mit den ganzzahligen Koordinaten (r, s) heiße P_{rs}.

Geht man ohne Umweg vom Punkte P_{00} zum Punkt P_{rs} $(r \geqq 0,\ s \geqq 0)$, so hat man an jeder Straßenecke die Entscheidung zu treffen, ob man nach Norden (N) oder Osten (O) zu gehen wünscht; dabei hat man in beliebiger Reihenfolge r-mal die Entscheidung O und s-mal die Entscheidung N zu treffen (s. Figur). Da man r Buchstaben O und s Buchstaben N insgesamt auf $\binom{r+s}{r}$ Weisen anordnen kann, so ergibt sich, daß es genau $\binom{r+s}{r}$ umwegfreie Wege von P_{00} nach P_{rs} gibt.

Wir schränken nun das zur Verfügung stehende Stadtgebiet ein, indem wir geradlinig von P_{00} nach P_{rs} eine Diagonale ziehen, durch die die Stadt in einen Nordwestsektor und einen Südostsektor geteilt wird; auf der Diagonale liegende Punkte rechnen wir zum Südostsektor. Ein umwegfreier, auf der Diagonale beginnender und endender Weg heiße ein *Sektorweg*, wenn er den Südostsektor nicht verläßt; er heiße ein *primitiver Sektorweg*, wenn er überdies außer seinen Endpunkten keinen Punkt der die Sektorengrenze bildenden Diagonale enthält. Arithmetisch gesprochen: die Wege sollen nur über Gitterpunkte $P_{\varrho\sigma}$ mit $\varrho s - \sigma r \geqq 0$ bzw. > 0 führen.

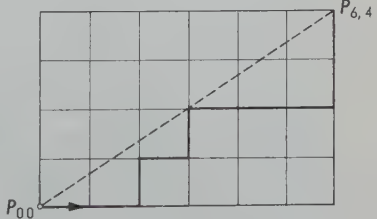

Fig. 1

Wir fragen nach der Anzahl $b(r, s)$ aller Sektorwege sowie nach der Anzahl $c(r, s)$ aller primitiven Sektorwege, die von P_{00} nach P_{rs} führen. Die Antwort geben wir in Gestalt von Relationen für erzeugende Funktionen. r_0, s_0 seien teilerfremde natürliche Zahlen. Bilden wir dann mit einer Variablen z die Potenzreihen

$$f(z) = f(z|r_0, s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nr_0 + ns_0} \binom{nr_0 + ns_0}{nr_0} z^n,$$

$$g(z) = g(z|r_0, s_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b(nr_0, ns_0)\, z^n,$$

$$h(z) = h(z|r_0, s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c(nr_0, ns_0)\, z^n,$$

die wegen $0 \leqq c(r, s) \leqq b(r, s) \leqq \binom{r+s}{r}$ jedenfalls für hinreichend kleine positive $|z|$ konvergieren, so werden wir in § 3

$$e^{f(z)} = g(z) = \frac{1}{1 - h(z)} \tag{1}$$

beweisen. Ferner zeigen wir in § 4, daß $g(z)$ eine algebraische Funktion von z ist.

Wir erwähnen noch die Symmetrieeigenschaften

$$\binom{r+s}{r} = \binom{r+s}{s}, \quad b(r, s) = b(s, r), \quad c(r, s) = c(s, r), \tag{2}$$

die man unmittelbar aus Symmetrieeigenschaften unserer Straßennetze ablesen kann. — Die Rechnung in § 4 wird übrigens durchaus unsymmetrisch in r und s sein.

§ 2

Die geschilderte Wegeaufgabe gestattet noch mancherlei andere Einkleidungen. Eine davon betrifft Anordnungen von Klammern.

Zunächst sei $r = s$. Für jeden Ost-Schritt setzen wir eine öffnende Klammer, also (, und für jeden Nord-Schritt setzen wir eine schließende Klammer, also). Beispielsweise ergibt der durch OONONONN gekennzeichnete Weg die Klammernanordnung (()()()). Die Bedeutung der Sektorwege besteht nun darin, daß sie den „sinnvollen Klammeranordnungen" entsprechen, bei denen in gewohnter Weise jede öffnende Klammer eineindeutig einer irgendwo rechts davon stehenden schließenden Klammer so zugeordnet ist, daß sich je zwei Paare zugeordneter Klammern gegenseitig nicht trennen.

Sind r, s, r_0, s_0 beliebige natürliche Zahlen mit $r : s = r_0 : s_0$, so sind die Sektorwege von P_{00} nach P_{rs} durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Setzt man für jeden Ost-Schritt genau s_0 öffnende Klammern und für jeden Nord-Schritt genau r_0 schließende Klammern, so entsteht eine sinnvolle Klammeranordnung. Beispiel: $r = r_0 = 3$, $s = s_0 = 2$; dem durch OONON gekennzeichneten Sektorweg entspricht die sinnvolle Klammeranordnung ((((())) (())).

§ 3

Von nun an seien die teilerfremden natürlichen Zahlen r_0, s_0 fest gewählt.

Jeder Sektorweg von P_{00} nach $P_{n r_0, n s_0}$ kann offenbar erhalten werden, indem man die Diagonale $P_{00} P_{n r_0, n s_0}$ auf alle möglichen Arten in Abschnitte teilt, die bei irgendwelchen auf der Diagonale liegenden Gitterpunkten beginnen oder enden, und dann Anfangs- und Endpunkt jedes solchen Abschnitts durch einen primitiven Sektorweg verbindet. Die Abzählung aller dabei bestehenden Möglichkeiten liefert die Formel

$$b(n r_0, n s_0) = \sum{}' \prod_{i=1}^{m} c(n_i r_0, n_i s_0), \tag{3}$$

wobei sich die Summation $\sum'$ auf alle Systeme natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m$ erstreckt, die bei beliebigem m der Bedingung $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ genügen. (3) ergibt für die erzeugenden Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ die Relation

$$g(z) = 1 + h(z) + h^2(z) + \cdots = \frac{1}{1 - h(z)};$$

das ist ein Teil der Behauptung (1).

Ist W irgendein (umwegfreier) Weg und P ein Gitterpunkt, so sei $W - P$ derjenige Weg, der aus W durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $-\overrightarrow{P_{00}P}$ hervorgeht. Die Gesamtheit der durch Parallelverschiebungen ineinander überführbaren Wege W heiße eine Wegeklasse Ω. Gilt für einen (beiderseits unendlichen) Weg W und eine natürliche Zahl n die Gleichung $W = W - P_{nr_0, ns_0}$, so heiße n eine Periode von W. Im folgenden haben wir es nur mit umwegfreien periodischen Wegen W zu tun. n_0 sei die kleinste natürliche Zahl, die eine Periode von W ist. Da n_0 offenbar nur von der Wegeklasse Ω abhängt, schreiben wir $n_0 = n_0(\Omega)$.

Ist Ω eine Wegeklasse mit der kleinsten Periode n_0, ist ferner W ein Weg aus Ω und sind $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ von W aufeinanderfolgend durchlaufene Gitterpunkte, so ist

$$W - P^{(1)}, W - P^{(2)}, \ldots, W - P^{(n_0 r_0 + n_0 s_0)} \tag{4}$$

ein vollständiges System aller voneinander verschiedenen Wege, die zu Ω gehören und durch den Punkt P_{00} gehen. Durchläuft nun Ω alle Wegeklassen, für die $n_0(\Omega)$ ein Teiler von n ist, so erhält man auf diese Weise alle umwegfreien Wege, die von P_{00} nach P_{nr_0, ns_0} gehen. Damit hat man die Relation

$$\sum (r_0 + s_0)\, n_0(\Omega) = \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0}, \tag{5}$$

wobei links über alle Ω mit $n_0(\Omega)/n$ zu summieren ist. — Beschränkt man sich bei den Wegen (4) jedesmal auf das Stück zwischen P_{00} und P_{nr_0, ns_0}, so befindet sich unter ihnen mindestens ein Sektorweg, denn $W - P_{ik}$ leistet das Verlangte, wenn P_{ik} ein solcher auf W gelegener Punkt ist, für den $s_0 i - r_0 k$ minimal ist. Der erwähnte Sektorweg von P_{00} nach P_{nr_0, ns_0} läßt sich nun wie oben aus primitiven Sektorwegen zusammenstückeln; durch periodisches Wiederholen mit der Periode n erhält man aus dem Sektorweg wieder einen unendlichen Weg, der zur Klasse Ω gehört. Das Wegstück zwischen P_{00} und P_{nr_0, ns_0} sei dabei aus genau m primitiven Sektorwegen zusammengestückelt. Wir permutieren nun diese m primitiven Sektorwege zyklisch auf alle m möglichen Arten, stückeln sie in dieser zyklisch permutierten Reihenfolge zusammen und ergänzen die erhaltenen, die Punkte P_{00} und P_{nr_0, ns_0} verbindenden Wege zu periodischen Wegen mit der Periode n. Alle so erhaltenen Wege gehören der gleichen Wegeklasse Ω an; es befinden sich unter ihnen genau $\frac{m n}{n_0(\Omega)}$ verschiedene Wege. Das liefert die Abzählung

$$\sum{}' \frac{1}{m} \prod_{i=1}^{m} c(n_i r_0, n_i s_0) = \sum \frac{n_0(\Omega)}{n}$$

[dabei ist die Summationsbedingung bei $\sum'$ dieselbe wie in (3) und bei $\sum$ dieselbe wie in (5)]. Wegen (5) ist also

$$\sum{}' \frac{1}{m} \prod_{i=1}^{m} c(n_i r_0, n_i s_0) = \frac{1}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0}.$$

Geht man zu den erzeugenden Funktionen über, so bedeutet dies

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} h^m(z) = f(z),$$

also

$$f(z) = \log \frac{1}{1 - h(z)}.$$

Damit ist (1) vollständig bewiesen.

§ 4

In diesem Paragraphen bedeutet $\oint$ stets, daß die jeweils genannte Integrationsvariable den Nullpunkt der komplexen Ebene einmal im positiven Sinne umkreist.

Nach Definition ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0} z^n,$$

also

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r_0}{n r_0 + n s_0} \binom{n r_0 + n s_0}{n r_0} z^{n-1} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n r_0 + n s_0 - 1}{n r_0 - 1} z^{n-1},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{r_0} \binom{n r_0 + n s_0 - 1}{n r_0 - 1}. \tag{6}$$

Wir setzen

$$z = \frac{\eta^{r_0}}{(1+\eta)^{r_0 + s_0}}.$$

Durch diese Gleichung wird η als algebraische Funktion von z definiert. In der Umgebung von $z = 0$ gibt es r_0 Zweige dieser algebraischen Funktion, auf denen η zugleich mit z gegen 0 strebt; diese Zweige $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{r_0}$ hängen an der Stelle $z = 0$ in einem Verzweigungspunkt zusammen. Wir setzen noch (mit dem Hauptwert des Logarithmus)

$$v = \frac{1}{r_0} \sum_{\varrho=1}^{r_0} \log(1 + \eta_\varrho).$$

In der Umgebung des Nullpunkts ist v eine eindeutige Funktion von z, während die η_ϱ eindeutige Funktionen der durch $z = \zeta^{r_0}$ definierten Ortsuniformisierenden ζ sind. r_0-maliges Umkreisen des Nullpunkts durch z bedeutet einmaliges Umkreisen des Nullpunkts durch ζ; dieses wiederum bedeutet einmaliges

Umkreisen des Nullpunkts durch jedes der η_ϱ; also ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dv}{dz}\frac{dz}{z^n} &= \frac{1}{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dv}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z^n}\\
&= \frac{1}{r_0^2}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d}{d\zeta}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\log(1+\eta_\varrho)\frac{d\zeta}{z^n}\\
&= \frac{1}{r_0^2}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{1+\eta_\varrho}\frac{d\eta_\varrho}{d\zeta}\frac{d\zeta}{z^n}\\
&= \frac{1}{r_0^2}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{(1+\eta_\varrho)^{r_0+s_0}}{\eta_\varrho^{r_0}}\right)^n\frac{d\eta_\varrho}{1+\eta_\varrho}\\
&= \frac{1}{r_0}\frac{1}{2\pi i}\oint (1+\eta)^{nr_0+ns_0-1}\frac{d\eta}{\eta^{nr_0}}\\
&= \frac{1}{r_0}\binom{nr_0+ns_0-1}{nr_0-1}.
\end{aligned}$$

Da eine reguläre Funktion von z durch ihre Potenzreihenentwicklung eindeutig bestimmt ist, folgt durch Vergleich mit (6)

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{dv}{dz},$$

und da sowohl $f(z)$ als auch v für $z=0$ verschwindet, folgt $f(z)=v$. Die Relation (1) ergibt nun

$$g(z) = e^{f(z)} = \exp\left\{\frac{1}{r_0}\sum_{\varrho=1}^{r_0}\log(1+\eta_\varrho)\right\},$$

also

$$g(z) = \prod_{\varrho=1}^{r_0}(1+\eta_\varrho)^{\frac{1}{r_0}}.$$

Da die η_ϱ algebraische Funktionen von z sind, gilt dasselbe für $g(z)$.

Wir betrachten noch den Spezialfall $r_0=1$. Die Formeln werden dann besonders einfach, nämlich $g(z)=1+\eta$ mit $z=\frac{\eta}{(1+\eta)^{1+s_0}}$. Wegen

$$\frac{dg(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,b(n,ns_0)\,z^{n-1}$$

liefert das die Beziehung

$$\begin{aligned}
n\,b(n,ns_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dg}{z^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint \left(\frac{(1+\eta)^{1+s_0}}{\eta}\right)^n d\eta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint (1+\eta)^{n+ns_0}\frac{d\eta}{\eta^n} = \binom{n+ns_0}{n-1},
\end{aligned}$$

also

$$b(n,ns_0) = \frac{1}{n}\binom{n+ns_0}{n-1} = \frac{1}{1+ns_0}\binom{n+ns_0}{n}.$$

Göttingen, Bunsenstr. 3/5

(Eingegangen am 21. Januar 1957)

Atkinson, F. V.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 82—99 (1957)

Estimation of an Eigen-Value Occurring in a Stability Problem

By
F. V. Atkinson

1. Introduction

It is well-known that the differential equation

$$y'' = -\lambda p(x)\, y, \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.1}$$

in which $p(x)$ is real, suitably continuous and of period 2π, has at least one solution such that $y(x+2\pi)/y(x) = \text{const} = \varrho$ (say) (see e.g. Bieberbach [1], § 11.2). The case in which $|\varrho| = 1$ is of especial interest in view of the implication that y is bounded as $x \to \pm\infty$. This paper deals with the eigen-value problem in which for given ϱ with $|\varrho| = 1$, λ is to be found.

Making the conventional restrictions

$$\int_0^{2\pi} p(x)\, dx \geqq 0, \qquad p(x) \not\equiv 0, \tag{1.2}$$

and putting $\varrho = \exp(2\pi i \mu)$ we can assert that for given real μ there will be an infinity of positive λ-values $\lambda_r(\mu)$ for which (1.1) has a non-trivial solution satisfying

$$y(x+2\pi) = \exp(2\pi i \mu)\, y(x). \tag{1.3}$$

The aim of this paper is to establish bounds for $\lambda_1(\mu)$, the smallest such positive eigen-value. Known information includes lower bounds for $\lambda_1(\mu)$, particularly for the case $\mu = \frac{1}{2}$ and for the cases of non-negative $p(x)$ and odd $p(x)$. Here I extend these lower bounds, and supplement them with upper bounds, with a view to ascertaining the actual order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$.

The $\lambda_1(\mu)$, especially in the cases $\mu = 0, \frac{1}{2}$, have a known connection with the location of "stability-zones" on the real λ-axis, within which the solutions of (1.1) are all bounded (Lyapunov [2]). In particular, the $\lambda_1(\mu)$ for $0 < \mu < \frac{1}{2}$ constitute the first stability zone in the positive λ-axis. The interest attaching to questions of stability has led to estimates of $\lambda_1(\mu)$ being partly obscured n the form of stability criteria. Denoting by Λ the largest number such that (1.1) has only bounded solutions for $0 < \lambda < \Lambda$, it is known that $0 < \lambda_1(\frac{1}{2}) \leqq \Lambda$. Thus any lower bound for $\lambda_1(\frac{1}{2})$ is also one for Λ, and thus yields a stability criterion. However many known stability criteria are valid also in the stronger sense of providing lower bounds for $\lambda_1(\frac{1}{2})$. So far as lower bounds are concerned, there is thus a gain in logical precision in expressing these results as bounds for $\lambda_1(\frac{1}{2})$ rather than as bounds for Λ. So far as upper bounds are

concerned, it seems that it is only $\lambda_1(\frac{1}{2})$ that we can expect to bound; the difficulty of bounding Λ from above arises from the possibility of separate stability-zones joining up under continuous variation of $p(x)$; an extreme example is given by $p(x) \equiv 1$, in which $\Lambda = \infty$.

The theory of (1.1) with periodic $p(x)$ has been largely developed by the methods of FLOQUET and STURM and, particularly by LYAPUNOV, by the use of power-series in λ. Here I revert to HILL's method of reduction to an infinite system of linear equations. This has the advantage that one can treat in place of (1.1) the more general equation

$$d^{2k} y / d x^{2k} = (-)^k \lambda p(x) y, \tag{1.4}$$

without additional difficulty; this will accordingly be done here. It would also be possible to treat the extension in which y and p denote vectors and matrices, but here I confine myself to the ordinary case.

2. Precision of estimates for $\lambda_1(\mu)$

We seek bounds of the form

$$F(p, \mu) \leqq \lambda_1(\mu) \leqq G(p, \mu), \tag{2.1–2}$$

where the functionals F, G will in fact be expressed in terms of the Fourier coefficients of $p(x)$, and $0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$. The most common way in which such estimates are "precise" or "best possible" is that they should not admit of improvement by constant factors, i.e. (2.1–2) should become false for some $p(x)$ if F and G are multiplied by numbers greater than and less than unity, respectively.

To some extent it is however possible to find bounds of this form satisfying further requirements, such as:

(i) the bounds should fix the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$, that is to say the ratio $G(p, \mu)/F(p, \mu)$ should have an upper bound independent of $p(x)$, and possibly of k and μ also,

(ii) the bounds should fix the asymptotic behaviour of $\lambda_1(\mu)$ for small μ, i.e. they should imply a formula

$$\lambda_1(\mu) \sim H(p, \mu) \tag{2.3}$$

as $\mu \to 0$,

(iii) for each of the bounds (2.1–2) there should be one case, and if possible two distinct cases, of functions $p(x)$ for which the bounds are precise.

The main cases of special $p(x)$ relevant to (iii) are

(a) the case $p(x) \equiv 1$, and

(b) the case in which $p(x)$ is a periodic "impulse-function", defined formally by $p(x) d x = d\sigma(x)$, where $\sigma(x)$ is a step-function with unit jumps where x is a multiple of 2π. There are two ways of utilising case (b) for the study of the bounds (2.1–2). We may treat the impulse-function as a limiting case of a sequence of continuous functions, so as to produce a limiting ratio of

unity in (2.1) or (2.2), or both. Alternatively, we may generalise (1.4) to an integral equation, in which the place of $p(x)$ is taken by its integral, iterated if necessary.

The latter aspect ties up with the question of the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$. In trying to generalise the theory beyond the domain of continuous $p(x)$, it is natural to admit for $p(x)$, if possible, any of the class of functions for which the functional, giving the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$, is finite. It turns out that this entails an extension from the set of continuous $p(x)$ to the set of $p(x)$ which have a k-th iterated integral belonging to $L^2(0, 2\pi)$, and so beyond such cases as impulse-functions. At the end of this paper I indicate a possible version of the integral equation generalising (1.4).

3. Lyapunov's results, and certain extensions

The earliest examples of bounds of the form (2.1) were given by Lyapunov, for the case $k=1$ and $\mu=\frac{1}{2}$. Strictly speaking, these were given as stability criteria, but hold in the present, stronger sense.

The best-known result deals with the case of non-negative $p(x)$, and asserts that

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}) \geq \left\{\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} p(x)\, dx\right\}^{-1}; \tag{3.1}$$

proofs, formulated for the stability interpretation, are given in the recent texts of Bieberbach ([1], § 11.3) and Bellman ([3], pp. 123—125). That the constant $\frac{1}{2}\pi$ on the right cannot be improved was shown by Wintner and van Kampen [4].

Certain extensions are possible to the case in which $p(x)$ may take both signs, still satisfying (1.2). In this case we may replace $p(x)$ on the right of (3.1) by $|p(x)|$ (Borg [5]), or (better) by $\frac{1}{2}\{p(x)+|p(x)|\}$ (Kreĭn [6]); in the latter work Kreĭn also gives still sharper criteria, postulating a knowledge of $\max|p(x)|$. Hartman and Wintner [7] have shown that the expression on the right of (3.1) is but one of a variety of possible functionals, for each of which a best possible constant factor can be specified; their result is formulated as an oscillation criterion.

Another result of Lyapunov [8], for the case of odd $p(x)$, has received less attention. This states that

$$\lambda_1(\tfrac{1}{2}) \geq \left\{\tfrac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} (P(x))^2\, dx\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.2}$$

where $P(x)$ is that integral of $p(x)$ which has zero mean-value over a period. Again, the constant $\frac{1}{2}\pi$ on the right cannot be improved.

In this paper it will be shown that both these results are correct as regards order of magnitude, for the special cases of non-negative $p(x)$ and odd $p(x)$. For the case of general $p(x)$, the expression for the order of magnitude of resembles (3.2) rather than (3.1).

4. Results for the case $p(x) \geq 0$

For this case, and for general integral $k \geq 1$, we have.

Theorem 1. *Let $p(x)$ be continuous and real-valued, non-negative and not identically zero Let its complex Fourier expansion be*

$$p(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} p_n e^{nix}. \tag{4.1}$$

Then $\lambda_1(\mu)$, the least positive λ for which (1.4) *has a non-trivial solution satisfying* (1.3), *has, for $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, the bounds*

$$p_0^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r+\mu)^{-2k} \leq 1/\lambda_1(\mu) \leq \sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_{r-s}|^2 (r+\mu)^{-2k} (s+\mu)^{-2k}}. \tag{4.2–3}$$

Less precisely,

$$p_0 \mu^{-2k} \leq 1/\lambda_1(\mu) \leq p_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (r+\mu)^{-2k}. \tag{4.4–5}$$

Before proving Theorem 1, I deduce (4.4–5) from (4.2–3), and discuss the precision of these results.

The deduction of (4.4) from (4.2) is trivial, $p_0 \mu^{-2k}$ being merely one of the terms on the right of (4.2). We get (4.5) from (4.3) by replacing all the $|p_n|$ by p_0; this is legitimate since

$$|p_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} p(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx = p_0 \tag{4.6}$$

for non-negative $p(x)$.

The result (4.4) and hence also (4.2), is precise in the case $p(x) = \text{const} > 0$. Actually (4.2) is precise in a distinct case also, that of the periodic "impulse-function", discussed in § 2, obtained formally by putting $p_n = 1$ for all n; in this case the lower and upper bounds (4.2), (4.5) clearly become the same. To reach this result in a limiting sense, confining ourselves to continuous $p(x)$, we may for example make $p(x)$ run through the sequence of non-negative trigonometric polynomials $N^{-1} \sin^2 \frac{1}{2} N x \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} x$ $(N = 1, 2, \ldots)$. The case of the periodic impulse-function also makes (4.3) precise.

Passing to the two other notions of precision referred to in § 2, it is clear that (4.4–5) imply that as $\mu \to 0$ through positive values

$$\lambda_1(\mu) \sim \mu^{2k} p_0^{-1} \tag{4.7}$$

and further that (4.4–5) fix the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$. The ratio of the two bounds in (4.4–5) lies between 1 and $\frac{1}{4}\pi^2$.

The LYAPUNOV result (3.1) is included in (4.5), as may be verified on putting $k = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$.

The conditions of Theorem 1 can be slightly weakened, in as much as (4.3–4) hold if $p(x)$ satisfies (1.2), without being restricted to be non-negative. However these two results do not suffice to fix the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$.

I pass to the proof of Theorem 1, which falls into three stages, the reduction to a set of linear equations, the estimation of eigen-values of such equations, and the estimation of some elementary sums.

5. Reduction to a system of linear equations

This is accomplished by

Lemma 1. *The number $\lambda_1(\mu)$, defined for $0<\mu\leqq\frac{1}{2}$ as the smallest positive λ for which* (1.4) *has a non-trivial solution satisfying* (1.3), *is also the smallest positive λ for which the system of equations*

$$(5.1)\quad a_m=\lambda\sum_{n=-\infty}^{\infty}p_{m-n}a_n(m+\mu)^{-k}(n+\mu)^{-k},\qquad(m=\cdots,-1,0,1,\ldots),$$

has a non-trivial solution $\{a_m\}_{-\infty}^{\infty}$ satisfying

$$(5.2)\qquad\sum_{-\infty}^{\infty}|a_m|^2<\infty.$$

Here the p_r are the complex Fourier coefficients given by (4.1) *of $p(x)$, assumed continuous and satisfying* (1.2).

Assume first that y is a non-trivial solution of (1.4) satisfying (1.3), and put

$$(5.3)\qquad z=d^k y/dx^k=\sum_{-\infty}^{\infty}a_m e^{ix(m+\mu)};$$

since z is continuously differentiable k times the a_m will satisfy (5.2). Substituting in (1.4) we have, formally,

$$(5.4)\quad\sum_{-\infty}^{\infty}a_m(im+i\mu)^k e^{ix(m+\mu)}=(-)^k\lambda\sum_{-\infty}^{\infty}p_r e^{irx}\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(in+i\mu)^{-k}e^{ix(n+\mu)}.$$

Here the series on the left and the first series on the right will certainly exist in the L^2-sense, while the remaining series is absolutely convergent. The process of comparing coefficients is then easily justified, and we deduce that we have a solution of (5.1) satisfying (5.2).

Assume conversely that we have a non-trivial solution of (5.1) satisfying (5.2). Applying the Cauchy inequality to (5.1) and summing over m we have

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_m|^2(m+\mu)^{2k}\leqq\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2(n+\mu)^{-2k}<\infty.$$

Thus the series on the left of (5.4) exists in the L^2-sense, while those on the right represent continuous functions. Hence it is easy to show that the two series on the right may be multiplied out and arranged in powers of e^{ix}, the result being identified with the series on the left in view of (5.1). Thus, defining y as equal to the series on the extreme right of (5.4), we derive a non-trivial solution of (1.4) satisfying (1.3).

Thus the two eigen-value problems have the same spectra, and the lemma is proved. The requirement (1.2) serves to ensure the existence of $\lambda_1(\mu)$.

6. Properties of infinite matrices

In this section I replace (5.1) by the system

$$a_m = \lambda \sum_n c_{mn} a_n, \tag{6.1}$$

summations being over $(-\infty, \infty)$ except where otherwise indicated. We write this in the form

$$\vartheta = \lambda C \vartheta \tag{6.2}$$

considering this as a linear equation in the HILBERT space T of sequences $\vartheta = \{a_m\}$ satisfying (5.2), the inner product being of course given by

$$(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}) = \sum a_m^{(1)} \overline{a_m^{(2)}}. \tag{6.3}$$

It will be sufficient to consider the case in which

$$\sum\sum |c_{mn}|^2 < \infty, \tag{6.4}$$

and in which C has Hermitean symmetry

$$c_{rs} = \overline{c_{sr}}. \tag{6.5}$$

We note first

Lemma 2. *If C satisfies* (6.4), *then it is a bounded operator on T into T, being in fact completely continuous.*

Writing $\vartheta = \{a_m\}$, $\varphi = C\vartheta = \{b_m\}$, an application of the CAUCHY inequality shows that

$$\sum |b_m|^2 \leqq \{\sum\sum |c_{mn}|^2\}\{\sum |a_m|^2\} \tag{6.6}$$

which proves the first part of the lemma.

To show that C is completely continuous, let $\vartheta_r = \{a_m^{(r)}\}$, $r = 1, 2, \ldots$, be a sequence of elements of T with $\|\vartheta_r\| = 1$, and let $\varphi_r = \{b_m^{(r)}\}$ be given by $\varphi_r = C\vartheta_r$. It follows from (6.6) that all the $|b_m^{(r)}|$ have a common upper bound, so that, for any fixed m, any infinite subsequence of the $b_m^{(r)}$ will be compact. Hence, by the diagonal process, one can find a subsequence S of r-values such that for every m, the sequence $b_m^{(r)}$ converges as $r \to \infty$, $r \in S$. To show that the sequence φ_r, $r \in S$, converges we observe that

$$\|\varphi_{r'} - \varphi_{r''}\|^2 = \sum |b_n^{(r')} - b_n^{(r'')}|^2 \leqq \sum_{|n| \leq N} |b_n^{(r')} - b_n^{(r'')}|^2 + 2 \sum_{|n| > N} \{|b_n^{(r')}|^2 + |b_n^{(r'')}|^2\}. \tag{6.7}$$

Now for any $\varepsilon > 0$ the last sum can be made less than $\frac{1}{3}\varepsilon$ by choosing N large, since [cf. (6.6)]

$$\sum_{|n| > N} |b_n^{(r)}|^2 \leqq \left\{ \sum_{|m| > N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{mn}|^2 \right\} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \right\}.$$

Having chosen N in this way, the first sum on the right of (6.7) can be made less than $\frac{1}{3}\varepsilon$ by choosing $r', r'' \in S$ sufficiently large. Hence the sequence φ_r, $r \in S$, satisfies the Cauchy convergence criterion, and therefore converges in T since T is complete. This completes the proof of Lemma 2.

We deduce that if (6.4) holds, then C has a discrete set of eigen-values, for which (6.2) has a non-trivial solution. If in addition (6.5) holds, these eigen-values will be all real. I denote them by λ_r, numbered so that

$$\cdots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \tag{6.8}$$

each corresponding to a distinct eigen-vector. I denote the latter by η_r, supposed normalised, and also orthogonalised in the case of coincident λ_r. I note that λ_1, the quantity of interest for the present purpose, will certainly exist if

$$c_{rr} \geq 0 \text{ for all } r, \quad \sum\sum |c_{rs}|^2 > 0, \tag{6.9–10}$$

which conditions are guaranteed by (1.2).

To estimate λ_1 from below we use

Lemma 3. *Let C satisfy* (6.4–5). *Then*

$$\sum \lambda_r^{-2} = \sum\sum |c_{rs}|^2. \tag{6.11}$$

Let ζ_r, $(r = \cdots, -1, 0, 1, \ldots)$, be the element $\{a_m\}$ of T given by $a_r = 1$, $a_m = 0$ for $m \neq r$. Since C is self-adjoint and completely continuous we have the eigen-vector expansion

$$C\zeta_r = \sum_s (C\zeta_r, \eta_s)\eta_r = \sum_s (\zeta_r, C\eta_s)\eta_s = \sum_s \lambda_s^{-1}(\zeta_r, \eta_s)\eta_s, \tag{6.12}$$

and so

$$(C\zeta_r, C\zeta_r) = \sum_s \lambda_s^{-2} |(\zeta_r, \eta_s)|^2$$

or, evaluating the left-hand side,

$$\sum_m |c_{mr}|^2 = \sum_s \lambda_s^{-2} |(\zeta_r, \eta_s)|^2.$$

The result now follows on summing with respect to r; we have, of course,

$$\sum_r |(\zeta_r, \eta_s)|^2 = 1$$

since the ζ_r form a complete orthonormal system.

As lower bounds for λ_1 we have

Lemma 4. *Let C satisfy* (6.4–5), *and also* (6.9–10). *Then*

$$\lambda_1^{-1} \leq \sqrt{\sum\sum |c_{rs}|^2}. \tag{6.13}$$

In particular, if $C \geq 0$, then

$$\lambda_1^{-1} \leq \sum c_{rr}. \tag{6.14}$$

The bound (6.13) follows immediately from Lemma 3; the hypotheses (6.9–10) serve merely to ensure the existence of λ_1.

In the case $C \geq 0$, we have $|c_{rs}|^2 \leq c_{rr}c_{ss}$, and inserting this on the right of (6.13) we get (6.14).

The bound (6.13) is well-known in the case of finite matrices, and could have been derived more simply by use of (6.6). The sharper result (6.11)

will be needed for the case of odd $p(x)$. The bound (6.14) could have been deduced from the ordinary trace-property

$$\sum \lambda_r^{-1} = \sum c_{rr} \tag{6.15}$$

which is certainly valid if $C \geqq 0$ and $\sum c_{rr}$ is finite, and may be proved in the same way as (6.11).

As upper bounds for λ_1 we have

Lemma 5. *Let C satisfy* (6.4–5). *If $c_{00} > 0$, then*

$$\lambda_1^{-1} \geqq c_{00}. \tag{6.16}$$

If $c_{00} > 0$, $C \geqq 0$, then

$$\lambda_1^{-1} \geqq c_{00}^{-1} \sum_r |c_{r0}|^2. \tag{6.17}$$

Since the η_s are an orthonormal system we have, by the BESSEL inequality,

$$(\zeta_0, \zeta_0) \geqq \sum_s |(\zeta_0, \eta_s)|^2.$$

Also, by (6.12),

$$(C\zeta_0, \zeta_0) = \sum_s \lambda_s^{-1} |(\zeta_0, \eta_s)|^2$$

so that

$$(C\zeta_0, \zeta_0) \leqq \lambda_1^{-1} \sum |(\zeta_0, \eta_s)|^2 \leqq \lambda_1^{-1} (\zeta_0, \zeta_0).$$

Since $(C\zeta_0, \zeta_0) = c_{00}$, $(\zeta_0, \zeta_0) = 1$, (6.16) follows.

If $C \geqq 0$, there are no negative λ_r, and so

$$(C\zeta_0, \zeta_0) = \sum_1^\infty \lambda_s^{-1} |(\zeta_0, \eta_s)|^2, \qquad (C\zeta_0, C\zeta_0) = \sum_1^\infty \lambda_s^{-2} |(\zeta_0, \eta_s)|^2,$$

whence $(C\zeta_0, C\zeta_0) \leqq \lambda_1^{-1} (C\zeta_0, \zeta_0)$. The result (6.17) now follows since

$$(C\zeta_0, \zeta_0) = c_{00}, \qquad (C\zeta_0, C\zeta_0) = \sum |c_{r0}|^2.$$

I conclude this section with sufficient conditions for some of the above bounds to be precise.

Lemma 6. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let $\lambda_1 > 0$ exist. Then for equality to hold in* (6.13) *it is necessary and sufficient that C should have the form $c_{rs} = d_r \bar{d}_s$. With the additional assumption that $C \geqq 0$, the same conditions are necessary and sufficient for equality in* (6.14).

Assume that (6.4–5) hold, that $\lambda_1 > 0$ exists and that equality holds in (6.13). It follows by Lemma 3 that λ_1 is the only eigen-value of (6.2), and so that C is one-dimensional. Hence the rows of C are mutually proportional. There must be at least one element on the leading diagonal which is non-zero; without loss of generality we may assume this to be c_{00}. We must then have $c_{00} > 0$; if $c_{00} < 0$ there would be at least one negative eigen-value, since the form $(C\vartheta, \vartheta)$ would then be capable of negative values, and this is impossible.

We then have, since the rows of C are proportional, $c_{rs}/c_{0s} = c_{r0}/c_{00}$, which gives the required representation with $d_r = c_{r0}\, c_{00}^{-\frac{1}{2}}$.

Conversely, if C satisfies (6.4–5), $\lambda_1 > 0$ exists and $c_{rs} = d_r \bar{d}_s$, it is readily found that (6.1) has the unique eigen-value

$$\lambda_1 = \{\sum |d_r|^2\}^{-1} = \{\sum\sum |c_{rs}|^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

If we assume that (6.4–5) hold, that $\lambda_1 > 0$ exists and that $C \geqq 0$, then precision in (6.14) will imply precision in (6.13), and we deduce that $c_{rs} = d_r \bar{d}_s$, as before. This could have been deduced from (6.15) also.

Conversely, we need only observe that the form $c_{rs} = d_r \bar{d}_s$ makes the bounds (6.13–14) identical.

Lemma 7. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let $c_{00} > 0$. Then for* (6.16) *to be precise it is necessary that $c_{r0} = 0$ for $r \neq 0$, and sufficient that $c_{rs} = 0$ for $r \neq s$ with $c_{rr} \leq c_{00}$ for $r \neq 0$.*

It is clear that if $C \geqq 0$, so that (6.17) holds, then (6.16) can be precise only if $c_{r0} = 0$ for $r \neq 0$. The necessity of this condition, without the assumption that $C \geqq 0$, follows from a later result (Lemma 11).

The sufficiency of the conditions stated in the Lemma is obvious; in the application in question, these are the same as the necessary conditions.

7. Some elementary sums

In connection with the matrix implied in (5.1) we need.

Lemma 8. *For integral $r \neq 0$, $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$, we have*

$$(7.1) \qquad \sum_{s=-\infty}^{\infty} (s+\mu)^{-2k} (r+s+\mu)^{-2k} \leq \tfrac{1}{4}\pi^2 \mu^{-2k} \{(r+\mu)^{-2k} + (r-\mu)^{-2k}\}.$$

We use the partial fraction representation

$$(7.2) \qquad x^{-2k}(x+r)^{-2k} = \sum_{l=0}^{2k-1} \binom{-2k}{l} r^{-2k-l} \{x^{l-2k} + (-)^l (x+r)^{l-2k}\};$$

the coefficients on the right may be found by considering expansions near $x = 0$ and $x = -r$. Putting $x = s + \mu$ in (7.2) and summing over s we get

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (s+\mu)^{-2k} (r+s+\mu)^{-2k} = 2 \sum_{m=0}^{k-1} \binom{-2k}{2m} r^{-2k-2m} \sum_{-\infty}^{\infty} (s+\mu)^{2m-2k},$$

the terms involving odd negative exponents cancelling out. Since

$$\mu^2 (s+\mu)^{-2} \leq 1$$

for $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ we have, for $0 \leq m \leq k-1$,

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} (s+\mu)^{2m-2k} &= \mu^{2m-2k} \sum_{-\infty}^{\infty} \{\mu/(s+\mu)\}^{2k-2m} \leq \mu^{2m-2k} \sum_{-\infty}^{\infty} \{\mu/(s+\mu)\}^2 \\ &= \mu^{2m-2k} (\pi\mu \operatorname{cosec} \pi\mu)^2 \leq \tfrac{1}{4}\pi^2 \mu^{2m-2k}. \end{aligned}$$

Hence

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k} \leq \frac{1}{2}\pi^2 \sum_{m=0}^{k-1}\binom{-2k}{2m} r^{-2k-2m}\mu^{2m-2k} <$$

$$< \frac{1}{2}\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-2k}{2m} r^{-2k-2m}\mu^{2m-2k}$$

$$= \frac{1}{4}\pi^2 \mu^{-2k}\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\},$$

which proves (7.1).

In the special case $k=1$ we have the more precise result,

Lemma 9. *For integral* $r \neq 0$, $0<\mu\leq\frac{1}{2}$,

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2}(r+s+\mu)^{-2} = 2\pi^2 r^{-2}\operatorname{cosec}^2\pi\mu. \tag{7.3}$$

This may be proved, as Lemma 8, by putting the expressions on the left into partial fractions.

8. Deduction of Theorem 1

We have merely to justify applying to the system of equations the results of § 6. We assumed throughout that (6.4–5) held when estimating λ_1. As regards (6.5), this applies to the case

$$c_{mn} = p_{m-n}(m+\mu)^{-k}(n+\mu)^{-k} \tag{8.1}$$

since $p_r = \bar{p}_{-r}$, $p(x)$ being a real-valued function. As regards (6.4) we have

$$\sum\sum |c_{mn}|^2 = \sum\sum |p_{m-n}|^2 (m+\mu)^{-2k}(n+\mu)^{-2k}$$

$$= \sum_r |p_r|^2 \sum_s (s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k}$$

$$\leq p_0^2 \sum (s+\mu)^{-4k} + \tfrac{1}{4}\pi^2\mu^{-2k}\sum |p_r|^2\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\},$$

and the right-hand side is finite, at any rate for continuous $p(x)$, since the p_r are then bounded. The requirement $C \geqq 0$ is fulfilled if $p(x)$ is non-negative; for if $\vartheta = \{a_m\}$ denotes an element of T, then

$$(C\vartheta, \vartheta) = \sum\sum p_{m-n} a_m \bar{a}_n (m+\mu)^{-k}(n+\mu)^{-k}$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} p(x)\,|\sum a_m (m+\mu)^{-k}\exp(i m x)|^2\,dx,$$

which is non-negative if $p(x)$ is so.

Of the assertions of Theorem 1, (4.3) and (4.5) follow directly from (6.13–14), while (4.2), (4.4) follow from (6.16–17).

The precision of (4.3), (4.5) is governed by Lemma 6. For comparing the representation $c_{rs} = d_r \bar{d}_s$ with (8.1), we see that the p_n must admit a representation of the form $p_{r-s} = e_r \bar{e}_s$. It is easily deduced that the e_r must form a geometrical progression, whose common ratio must have modulus

unity, since the bound (4.3) would otherwise be infinite. It follows that (4.3), with $\lambda_1(\mu)$ derived from (5.1), can be precise only if the p_r have the form $p_r = p_0 \exp(irx_0)$, which is effectively the case of the "periodic impulse-function".

The precision of (4.4) is governed by Lemma 7. The requirement $c_{r0} = 0$ for $r \neq 0$ is fulfilled only if $p(x)$ is a constant, and then the matrix C is diagonal, with for $c_{rr} \leqq c_{00}$ if $0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$. In this case (4.2) is also precise, but is again precise for the periodic impulse-function.

It has been mentioned that (4.3) holds for $p(x)$ satisfying (1.2), without $p(x)$ being required to be non-negative; further, the transition to (4.5) depended on p_0 being the greatest of the $|p_n|$. Generalising this argument we have

Theorem 2. *Let $p(x)$ be continuous, of period 2π, and satisfy* (1.2). *Then*

$$1/\lambda_1(\mu) \leqq \{\max_{-\infty<n<\infty} |p_n|\} \sum_{-\infty}^{\infty} (r+\mu)^{-2k}. \tag{8.2}$$

I note that this includes BORG's extension [5] of LYAPUNOV's result (3.1), though perhaps not necessarily KREĬN's [6].

9. The case of odd $p(x)$

This case was investigated by LYAPUNOV (see § 3). A generalisation of his result is readily deduced from

Lemma 10. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let further*

$$c_{sr} = -c_{rs} \tag{9.1}$$

$$\sum\sum |c_{rs}|^2 > 0. \tag{9.2}$$

Then

$$\sqrt{\sum_r |c_{r0}|^2} \leq \lambda_1^{-1} \leq \sqrt{\sum_{r>s} \sum_s |c_{rs}|^2}. \tag{9.3–4}$$

This depends on the property that if η_r, λ_r are an eigen-vector and an eigen-value of C, then so are $\bar{\eta}_r$, $-\lambda_r$. For if $\eta_r = \{a_m^{(r)}\}$, then

$$a_m^{(r)} = \lambda_r \sum_n c_{mn} a_n^{(r)},$$

and so

$$\begin{aligned} \bar{a}_n^{(r)} &= \lambda_r \sum_n \bar{c}_{mn} \bar{a}_n^{(r)} \\ &= \lambda_r \sum_n c_{nm} \bar{a}_n^{(r)} = -\lambda_r \sum_n c_{mn} \bar{a}_n^{(r)}, \end{aligned}$$

as asserted.

It follows that $\lambda_{-1} = -\lambda_1$, and so, from (6.11),

$$2\lambda_1^2 \leq \sum\sum |c_{rs}|^2,$$

which proves (9.4).

For (9.3) we use the results, already used in § 6,

$$1 = (\zeta_0, \zeta_0) \geq \sum |(\zeta_0, \eta_s)|^2, \qquad \sum |c_{r0}|^2 = (C\zeta_0, C\zeta_0) = \sum \lambda_s^{-2} |(\zeta_0, \eta_s)|^2.$$

Since $\lambda_s^{-2} \leq \lambda_1^{-2}$ for all s, (9.3) follows.

The conditions of Lemma 10 are satisfied by (8.1) if $p(x)$ is continuous, of period 2π, and odd. Hence

Theorem 3. *If $p(x)$ is continuous, of period 2π, and odd, then*

$$(9.5\text{–}6) \quad \mu^{-k}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r+\mu)^{-2k}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \leq \left\{\sum_{\substack{-\infty \\ r>s}}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_{r-s}|^2 (r+\mu)^{-2k} (s+\mu)^{-2k}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

In the case $k=1$ (9.6) becomes, using Lemma 9,

$$(9.7) \qquad 1/\lambda_1(\mu) \leq \left\{2\pi^2 \operatorname{cosec}^2(\pi\mu) \sum_{1}^{\infty} |p_r|^2 r^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

and putting $\mu = \frac{1}{2}$ we derive as a special case the LYAPUNOV result (3.2).

Considering the precision of the bounds (9.5–6) after the manner of § 2, it may be shown, using Lemma 8, that the ratio of the bounds (i.e. upper bound over lower bound) does not exceed $\frac{1}{2}\pi$; the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$ is therefore fixed in this case. For small positive μ we have [cf. (4.7)]

$$(9.8) \qquad \lambda_1(\mu) \sim \mu^k \left\{\sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} |p_r|^2 r^{-2k}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

There remains the question of whether the bounds (9.5–6) are actually attained. This would not seem to occur for (9.5) but for (9.6) the position resembles that regarding (4.5); (9.6) is not attained for continuous $p(x)$, but is so in a limiting sense or for a suitable generalisation of the differential equation. The argument of Lemma 10 shows that (9.4) is precise if C is two-dimensional, in addition to the other requirements of Lemma 10, which can be achieved by taking C to be the sum of two one-dimensional operators. The latter was shown to lead to the case of the "periodic impulse-function", and so we are led to choose for $p(x)$ what may be termed an "alternating periodic impulse-function", formed by a succession of positive and negative impulses; formally, we choose as the Fourier coefficients of $p(x)$ the numbers $p_r = 2i \sin r x_0$, for some real x_0. In particular, this argument shows that the constant $\frac{1}{2}\pi$ appearing in (3.2) cannot be improved.

10. The case of general $p(x)$

It has been mentioned that LYAPUNOV's bound (3.1) for the case $p(x) \geq 0$ admits of modification to the case in which $p(x)$ satisfies the weaker condition (1.2). However these modified results are open to the objection that they do not always indicate the actual order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$. This may be seen from the example $p(x) = \sin nx$, for large integral n. The result (3.1),

as modified by BORG [5] or by KREĬN [6], gives a fixed lower bound for $\lambda_1(\frac{1}{2})$, whereas it follows from (3.2) that $\lambda_1(\frac{1}{2})$ is of order of magnitude n in this case. To determine the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$ in the more general case of (1.2) I prove

Theorem 4. *Let $p(x)$ be continuous and of period 2π, and let* (1.2) *hold. Then for $0<\mu\leq\frac{1}{2}$ we have*

$$\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)+\sqrt{\left\{\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)^2+\beta^2\right\}} \leq \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \leq \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)+\sqrt{\left\{\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\right\}}, \tag{10.1–2}$$

where

$$\alpha = p_0\mu^{-2k}, \tag{10.3}$$

$$\beta = \mu^{-k}\sqrt{\sum_{\substack{-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}} \tag{10.4}$$

and

$$\gamma = \sqrt{\sum_{\substack{-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{-\infty\\ s\neq 0}}^{\infty}|p_{r-s}|^2(r+\mu)^{-2k}(s+\mu)^{-2k}}. \tag{10.5}$$

The conclusion regarding the order of magnitude of $\lambda_1(\mu)$ is

Theorem 5. *Under the assumptions of Theorem* 4,

$$A\mu^{-k}\sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}} \leq \frac{1}{\lambda_1(\mu)} \leq B\mu^{-k}\sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}} \tag{10.6–7}$$

where the positive constants A, B are independent of the choices of $p(x)$, $k\geq 1$ and μ with $0<\mu\leq\frac{1}{2}$.

The conclusion regarding asymptotic behaviour for small positive μ is

Theorem 6. *Under the assumptions of Theorem* 4 *we have, as $\mu\to 0$,*

$$1/\lambda_1(\mu) = p_0\mu^{-2k}+O(1) \tag{10.8}$$

if $p_0>0$, and

$$1/\lambda_1(\mu) = \mu^{-k}\sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}|p_r|^2(r+\mu)^{-2k}}+O(1) \tag{10.9}$$

if $p_0=0$.

This includes as special cases (4.7) and (9.8), for the cases of non-negative and of odd $p(x)$.

Passing to the question of when the bounds (10.1–2) are actually attained, I note that the case $p(x)=\text{const}>0$, when $\beta=0$, makes (10.1) precise; it also makes (10.2) precise if $\gamma\leq\alpha$, and so if μ is sufficiently small. The case of the "periodic impulse-function" makes (10.2) precise for all μ with $0<\mu\leq\frac{1}{2}$, with similar qualifications as to interpretation as for (4.3) and (4.5).

11. Proof of Theorem 4

Theorem 4 follows immediately from the corresponding general result for matrices, which is

Lemma 11. *Let C satisfy* (6.4–5), *and let* $c_{00} \geqq 0$. *Then*

(11.1–2) $\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)+\sqrt{\{\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)^2+\beta^2\}} \leqq 1/\lambda_1 \leqq \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)+\sqrt{\{\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2+\beta^2\}}$,

where

(11.3–5) $$\alpha = c_{00}, \quad \beta = \sqrt{\sum_{r\neq 0} |c_{r0}|^2}, \quad \gamma = \sqrt{\sum_{r\neq 0}\sum_{s\neq 0} |c_{rs}|^2},$$

it being assumed that α, β and γ are not all zero.

We use the property that

(11.6) $$1/\lambda_1 = \max\{(C\vartheta,\vartheta)/(\vartheta,\vartheta)\},$$

taken over non-null $\vartheta \in T$. Putting $\vartheta = \{a_m\}$ we write

(11.7) $$(C\vartheta,\vartheta) = c_{00}|a_0|^2 + a_0\sum_{r\neq 0} c_{r0}\bar{a}_r + \bar{a}_0\sum_{r\neq 0} c_{0r}a_r + \sum_{r\neq 0}\sum_{s\neq 0} c_{rs}\bar{a}_r a_s.$$

To obtain the bound (11.2) we write $u = \sqrt{\sum_{r\neq 0}|a_r|^2}$, so that, by the CAUCHY inequality,

$$\left|\sum_{r\neq 0} c_{r0}\bar{a}_r\right| \leq u\beta, \qquad \left|\sum_{r\neq 0} c_{0r}a_r\right| \leq u\beta,$$

and

$$\left|\sum_{r\neq 0}\sum_{s\neq 0} c_{rs}\bar{a}_r a_s\right| \leq \gamma u^2.$$

Hence $(C\vartheta,\vartheta) \leq \alpha|a_0|^2 + 2\beta|a_0|u + \gamma u^2$, while $(\vartheta,\vartheta) = |a_0|^2 + u^2$, and so

$$(C\vartheta,\vartheta)/(\vartheta,\vartheta) \leq \{\alpha|a_0|^2 + 2\beta|a_0|u + \gamma u^2\}/\{|a_0|^2 + u^2\}.$$

Now the maximum of the expression on the right, for varying real $|a_0|$ and u, may be found by elementary arguments, and equals the bound given on the right of (11.2), which is therefore proved.

We prove (11.1) by showing that the expression which is maximised in (11.6) exceeds the value on the left of (11.1) for a particular ϑ. We take in act $a_m = c_{m0}$ for $m \neq 0$, a_0 being some real number to be fixed later. Then (11.7) gives

$$(C\vartheta,\vartheta) = \alpha a_0^2 + 2a_0\beta^2 + \sum\sum c_{rs}\bar{c}_{r0}c_{s0} \geq \alpha a_0^2 + 2a_0\beta^2 - \gamma\beta^2,$$

so that, with such a choice of ϑ,

$$(C\vartheta,\vartheta)/(\vartheta,\vartheta) \geq \{\alpha a_0^2 + 2a_0\beta^2 - \gamma\beta^2\}/\{a_0^2 + \beta^2\},$$

and the maximum of this for varying real a_0 is given by the expression on the left of (11.1). This completes the proof of Lemma 11.

Theorem 4 follows; that conditions (6.4–5) are verified for continuous real $p(x)$ was shown in proving Theorem 1, while the condition $c_{00} \geqq 0$ follows from (1.2).

12. Deduction of Theorem 5

The results to be proved, (10.6–7), may be written, in the notation of (10.3–4),

(12.1–2) $$A\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} \leq 1/\lambda_1(\mu) \leq B\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)},$$

where A and B are absolute positive constants. To prove this we first deduce from (10.1–2) the simpler but less sharp bounds

$$(12.3\text{–}4)\quad \tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2+\beta^2\right)}-\tfrac{1}{2}\gamma\leqq\frac{1}{\lambda_1(\mu)}\leqq\tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\alpha^2+\beta^2\right)}+\gamma,$$

and, secondly, prove that

$$(12.5)\qquad \gamma^2\leqq\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)(\alpha^2+2\beta^2).$$

It is obvious that (12.4–5) together imply a bound of the form (12.2). As regards (12.1) we have

$$\tfrac{1}{2}\alpha+\sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2+\beta^2)}-\tfrac{1}{2}\gamma\geqq\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-\tfrac{1}{2}\gamma,$$

and furthermore, since $\pi^2<10$, from (12.5) we have $\gamma^2\leqq\frac{3}{2}\alpha^2+3\beta^2$. Hence rom (12.3) we derive

$$1/\lambda_1(\mu)\geqq\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-\sqrt{(\tfrac{3}{8}\alpha^2+\tfrac{3}{4}\beta^2)}$$

which implies a bound of the form (12.1). For the proof of Theorem 5 it only remains to establish (12.3–5).

To prove (12.3–4) let us write

$$F(v)=\tfrac{1}{2}(\alpha+v)+\sqrt{\{\tfrac{1}{4}(\alpha-v)^2+\beta^2\}},$$

so that (10.1–2) may be written

$$(12.6\text{–}7)\qquad F(-\gamma)\leqq 1/\lambda_1(\mu)\leqq F(\gamma).$$

Now

$$F'(v)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}(v-\alpha)\{\tfrac{1}{4}(v-\alpha)^2+\beta^2\},$$

and so $0\leqq F'(v)\leqq\frac{1}{2}$ for $v\leqq\alpha$, $\frac{1}{2}\leqq F'(v)\leqq 1$ for $v\geqq\alpha$. Hence

$$F(-\gamma)\geqq F(0)-\tfrac{1}{2}\gamma,\qquad F(\gamma)\leqq F(0)+\gamma,$$

which together with (12.6–7) establish (12.3–4).

For the proof of (12.5) we put

$$(12.8)\qquad \gamma^2=(\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^2+2\beta^2).$$

Now

$$\begin{aligned}\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2&=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}|p_{r-s}|^2(r+\mu)^{-2k}(s+\mu)^{-2k}\\&=p_0^2\sum_{-\infty}^{\infty}(r+\mu)^{-4k}+\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}|p_r|^2\sum_{s=-\infty}^{\infty}(s+\mu)^{-2k}(r+s+\mu)^{-2k}\\&\leqq\tfrac{1}{4}\pi^2p_0^2\mu^{-4k}+\tfrac{1}{4}\pi^2\mu^{-2k}\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}|p_r|^2\{(r+\mu)^{-2k}+(r-\mu)^{-2k}\};\end{aligned}$$

here in the last sum we have used Lemma 8, and in the term involving p_0 have used the inequality $\sum (s+\mu)^{-4k} \leqq \frac{1}{4}\pi^2 \mu^{-4k}$, which is sufficiently accurate for our purpose, and which is contained in a similar inequality established in the course of the proof of Lemma 8. We may write this result as

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + \gamma^2 \leqq \tfrac{1}{4}\pi^2(\alpha^2 + 2\beta^2),$$

which proves (12.5) and so completes the proof of Theorem 5.

13. Deduction of Theorem 6

For fixed $p(x)$, satisfying the conditions of Theorem 4, we have as $\mu \to 0$, $\gamma = O(1)$. Hence from (12.3–4)

$$1/\lambda_1(\mu) = \tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\alpha^2 + \beta^2)} + O(1).$$

Now if $p_0 > 0$, so that $\alpha = p_0 \mu^{-2k} > 0$, we have $\beta^2 \alpha^{-1} = O(1)$ as $\mu \to 0$, and so

$$1/\lambda_1(\mu) = \alpha + O(1),$$

while if $p_0 = 0$, $\alpha = 0$ and so

$$1/\lambda_1(\mu) = \beta + O(1),$$

which are the results of Theorem 6.

14. Generalisation of the coefficient function $p(x)$

In proceeding from the differential equation (1.4) to the system of linear equations (5.1), and again when considering the positive-definiteness of the matrix (8.1), it was assumed that $p(x)$ was continuous. This can easily be extended to piecewise continuity, and further extensions are possible in which $p(x)$ retains its character of a function. However a wider extension turned out to be necessary in considering the precision of estimates for $\lambda_1(\mu)$, namely to impulse-functions which are, so to speak, the derivatives of step-functions. In the case $k = 1$, the appropriate generalisation of the differential equation has been investigated by KREĬN [9, and elsewhere], with particular reference to the dynamical interpretation in terms of a vibrating loaded string. In KREĬN's work this extension is of importance in connection with inverse spectral problems.

In the present case, the argument leading from the system of equations (5.1) to the bounds of Theorems 4, 5 and 6 retain their validity if the Fourier coefficients p_r satisfy the requirements $p_0 \geqq 0$, $p_{-r} = \overline{p}_r$, and

$$0 < p_0^2 + \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} |p_r|^2 r^{-2k} < \infty.$$

The question arises of whether a corresponding extension is possible for the differential equation (1.4), and what, if any, other parts of the theory of differential equations of this form survive the extension. Here I confine myself to indicating a possible extension of (1.4). The set of solutions of (1.4) is in fact the same as the set of solutions of the integral equation

$$z(x) = (-)^k \lambda \int_0^x \Gamma(x,t)\{z(t) + q_1(t)\}\,dt + q_2(x),$$

where

$$\Gamma(x,t) = \{(k-1)!\}^{-2} \int_t^x (x-u)^{k-1}(u-t)^{k-1} p(u)\,du,$$

$$y(x) = \{(k-1)!\}^{-1} \int_0^x (x-t)^{k-1}\{z(t) + q_1(t)\}\,dt,$$

and q_1, q_2 are arbitrary polynomials of degree less than k, corresponding to the $2k$ constants of integration in (1.4). It is plain that if we integrate by parts k times in the expression for $\Gamma(x,t)$, the result involves only the k-th terated integral of $p(x)$, say $p_k(x)$. The integral equation therefore has sense, in the space of functions which are of L^2 over any finite interval, if $p_k(x)$ is also of L^2. As to periodicity, we should require there to exist a polynomial of degree at most k, say $p_k^*(x)$, such that $p_k(x) - p_k^*(x)$ had period 2π.

15. The connection with stability

We have shown that for continuous periodic $p(x)$ satisfying (1.2), $\lambda_1(\mu) \to 0$ as $\mu \to 0$, $\lambda_1(\mu)$ being positive. If in addition we show that $\lambda_1(\mu)$ depends continuously on μ in $0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$, we can assert that (1.4) has two distinct solutions for $0 < \lambda < \lambda_1(\frac{1}{2})$ which are bounded as $x \to \pm\infty$. For $k \geqq 2$, this will not constitute a "stability-zone" in the ordinary sense, since there may exists unbounded solutions as well, as may be verified from the simple case $p(x) = 1$.

The requisite continuity of $\lambda_1(\mu)$ may be deduced from the extremal expression for $\lambda_1(\mu)$ [cf. (11.6)] which is

$$1/\lambda_1(\mu) = \max\{\sum\sum p_{r-s}\bar{a}_r a_s (r+\mu)^{-k}(s+\mu)^{-k} / \sum |a_r|^2\},$$

or, in the case of suitably continuous $p(x)$,

$$1/\lambda_1(\mu) = \max\left\{\int_0^{2\pi} p(x)\,|f(x)|^2\,dx \Big/ \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(x)|^2\,dx\right\},$$

taken over functions $f(x)$ such that $f(x+2\pi) = e^{2\pi i\mu} f(x)$, and such that $f^{(k)}(x) = d^k f/dx^k$ is of $L^2(0, 2\pi)$.

References

[1] Bieberbach, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin 1953. — [2] Lyapunov, A. M.: C. R. Acad. Sci. Paris **128**, 1085—1088 (1899). — [3] Bellman, R.: Stability theory of differential equations. New York 1953. — [4] Kampen, E. R. van, and A. Wintner: Amer. J. Math. **59**, 270—274 (1937). — [5] Borg, G.: Amer. J. Math. **71**, 67—70 (1949). — [6] Kreĭn, M. G.: Priklad. Mat. i Meh. **15**, 323—348 (1951). — [7] Hartman, P., and A. Wintner: Amer. J. Math. **73**, 885—890 (1951). — [8] Lyapunov, A. M.: C. R. Acad. Sci. Paris **123**, 1248—1252 (1896). — [9] Kreĭn, M. G.: Doklady Akad. Nauk SSSR. **93**, 767—770 (1953).

Canberra University College, Canberra, A.C.T., Australia

(Eingegangen am 28. Januar 1957)

Mikolás, M.
Math. Zeitschr. Bd. 68, S. 100—110 (1957)

Über gewisse Lambertsche Reihen, I: Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\tau)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel

Von
Miklós Mikolás

1. Seitdem Dedekind in seinen Erläuterungen zu den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Funktionen [5] die Bedeutung von $\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau})$ für die allgemeine Theorie der elliptischen Modulfunktionen gezeigt und das Verhalten von[1]) $\operatorname{Log} \eta(\tau)$ gegenüber Modulsubstitutionen festgestellt hat, sind diese Ergebnisse bekanntlich die Anfangspunkte zahlreicher Untersuchungen geworden. Es seien vor allem die Theorie der Partitionen und diejenige der gewöhnlichen und generalisierten Dedekindschen Summen erwähnt[2]).

Das genannte Transformationsgesetz für $\frac{\pi i \tau}{12} - \operatorname{Log} \eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i n \tau}}{1 - e^{2\pi i n \tau}}$ liegt ziemlich tief; erst 1955 gab Rademacher [12] einen verhältnismäßig kurzen, eleganten Beweis für diese Formel[3]). Vor einigen Jahren entdeckte Apostol, von der Verallgemeinerung der Dedekindschen Summenausdrücke ausgehend, daß auch alle Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2r+1)} e^{2\pi i n \tau}/(1 - e^{2\pi i n \tau})$ $(r = 1, 2, \ldots)$ entsprechenden Relationen Genüge leisten[4]).

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bildet nun die Untersuchung der Erzeugungsfunktion $\tilde{Q}(\tau, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+\omega} + \frac{1}{n-\omega} \right) \frac{e^{2\pi i n \tau}}{1 - e^{2\pi i n \tau}}$; die Möglichkeit einer solchen Erweiterung ist mir durch die Kenntnis von [12] suggeriert worden. Die erhaltene Funktionalgleichung [vgl. (3.1), (3.2)] impliziert sowohl Dedekinds Transformationsformel, als die Apostolschen Relationen. — Das

---

[1]) Es leuchtet ein, daß $\pi i \tau/12 - \sum_{m,n=1}^{\infty} n^{-1} e^{2\pi i m n \tau}$ unter den Logarithmen von $\eta(\tau)$ enthalten ist; der durch diese Differenz eindeutig definierte Zweig soll durchwegs mit „Log" bezeichnet werden.

[2]) Vgl. z.B. das Literaturverzeichnis.

[3]) Vgl. auch [15], welche sich auf einen Spezialfall bezieht. Siehe noch Math. Rev. **17**, 15—16 (1956).

[4]) [1]; hierin wird die ältere, mit Mellinschen Integralen und der Hurwitzschen Zetafunktion verknüpfte Methode von Rademacher [10] benutzt. Auf demselben Weg wurden analoge, komplizierte Transformationsformeln bei erweiterten Partitionproblemen, z.B. in [14] gefunden.

Vorkommen einer Summe von der Form $\mathfrak{S}_c^{a,b}(x,y) = (e^{2\pi i x}-1)^{-1}(e^{2\pi i y}-1)^{-1}\cdot \sum_{\lambda=0}^{c-1} e^{2\pi i(\overline{\lambda a/c}\,x+\overline{\lambda b/c}\,y)}$ — wobei a, b und $c>0$ ganze Zahlen mit $(a,c)=(b,c)=1$ und $\bar{u}=u-[u]$ (hier und durchwegs) den gebrochenen Teil von u (beliebig reell) bedeutet[5]) — sowie die Benutzung der *Gruppeneigenschaft* der Modulsubstitutionen liefern auch *Anwendungen* in Verbindung *mit* den unlängst publizierten Resultaten [9]; insbesondere ergeben sich mehrere Formeln bzw. Reziprozitätsgesetze von Apostol, Carlitz, Dedekind und Rademacher über Dedekindsche Summen (vgl. §§ 5, 6).

2. Im folgenden werden x, y, z, t, τ, ω komplexe Variablen bezeichnen; setzt man $x=e^{2\pi i\tau}$ in einer Funktion $f(x,\ldots)$, so schreiben wir für die entstehende Funktion: $\tilde{f}(\tau,\ldots)$. Wir verwenden noch die übliche Abkürzung $e^{2\pi i\tau}=e(\tau)$; das Zeichen „log" bedeutet überall den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus.

Es sei die Lambertsche Reihe $G(x,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}\cdot\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\omega}\,x^{mn}$ betrachtet; sie konvergiert nach einem wohlbekannten Satz[6]) bei einem beliebigen festen $\omega\neq 1, 2, \ldots$ für $|x|<1$, und zwar in jedem Teilkreis $|x|\leqq\varrho$ mit $0<\varrho<1$ gleichmäßig. Man hat wegen $\frac{1}{n-\omega}=\frac{1}{\omega}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\omega}{n}\right)^p$ $(n=1,2,\ldots;\ |\omega|<1)$ die Entwicklung

$$G(x,\omega)=\sum_{p=1}^{\infty}\omega^{p-1}g_p(x) \qquad (|x|<1,\ |\omega|<1), \tag{2.1}$$

indem $g_p(x)=\frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{\partial^{p-1}}{\partial\omega^{p-1}}G(x,\omega)\right]_{\omega=0}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}x^n/(1-x^n)$ $(p=1,2,\ldots)$ gesetzt wird. Insbesondere ist

$$g_1(x)=G(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}x^n/(1-x^n)=-\sum_{m=1}^{\infty}\log(1-x^m) \qquad (|x|<1)$$

und

$$\tilde{g}_1(\tau)=\tilde{G}(\tau,0)=-\sum_{m=1}^{\infty}\log\bigl(1-e(m\tau)\bigr)=\frac{\pi i\tau}{12}-\operatorname{Log}\eta(\tau).$$

Wir schreiben noch

$$Q(x,\omega)=G(x,\omega)+G(x,-\omega) \qquad (|x|<1,\ \omega\neq\pm1,\pm2,\ldots),$$

so daß wegen (2.1)

$$Q(x,\omega)=2\left[g_1(x)+g_3(x)\omega^2+g_5(x)\omega^4+\cdots\right] \qquad (|x|<1,\ |\omega|<1). \tag{2.2}$$

[5]) $\mathfrak{S}_c^{a,b}(x,y)$ erzeugt alle (verallgemeinerten) Dedekindschen Summen in dem Sinn, daß die letzteren in den Koeffizienten der Entwicklung nach $x^m y^n$ $(m,n=0,1,2,\ldots)$ auftreten. [Vgl. (4.4), (4.5).] — Diese $\mathfrak{S}$-Summen sind in meiner Arbeit [9] eingehend untersucht.

[6]) Vgl. [8], S. 464; für eine ausführlichere Behandlung der Lambertschen Reihen sei auf [7] hingewiesen, wo unter anderem auch die Nichtfortsetzbarkeit der Reihensummen $\sum n^{-s}x^n/(1-x^n)$ (s fest, $\Re(s)\neq 0$, $|x|<1$) gezeigt wurde (§ 7).

3. Nun behaupten wir den folgenden

Satz. *Sind h, h' und k ganze Zahlen mit $k>0$, $(h,k)=1$ und $hh' \equiv -1 \pmod{k}$, so gilt für $\Im(z)>0$ und $\omega \neq n$, nz^{-1} $(n=0, \pm 1, \ldots)$ die Relation*

$$(3.1)\quad \begin{cases} \widetilde{Q}\left(\frac{h+z}{k}, \omega\right) - \widetilde{Q}\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}, z\omega\right) = \frac{1}{2}\left[Y(\omega) - Y(z\omega)\right] + \log z + \\ + 2\pi i\, \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) + \pi i\left[\left(e(\omega)-1\right)^{-1} + \left(e(z\omega)-1\right)^{-1}\right] - \frac{k}{2\pi i}\omega^{-1}(z\omega)^{-1}. \end{cases}$$

Hierin ist $\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) = \left[e(\omega)-1\right]^{-1}\left[e(z\omega)-1\right]^{-1}\sum_{\lambda=0}^{k-1} e\left(\omega\,\overline{\lambda h/k} + z\omega\cdot\lambda/k\right)$ *und* $Y(\omega) = \Psi(\omega) + \Psi(-\omega)$ *mit* $\Psi(\omega) = \Gamma'(\omega)/\Gamma(\omega)$. *— Es gilt speziell für* $h=h'=0$, $k=1$:

$$(3.2)\quad \begin{cases} \widetilde{Q}(z,\omega) - \widetilde{Q}\left(-\frac{1}{z}, z\omega\right) = \frac{1}{2}\left[Y(\omega) - Y(z\omega)\right] + \log\frac{z}{i} - \\ \qquad - \frac{\pi i}{2}\operatorname{ctg}\pi\omega\cdot\operatorname{ctg}\pi z\omega - \frac{1}{2\pi i}\,\omega^{-1}(z\omega)^{-1}. \end{cases}$$

Beweis. Es seien h, h', k, ω, z den genannten Beschränkungen unterworfen. Wegen $|e(z)|<1$ kann man schreiben

$$(3.3)\quad \begin{cases} \widetilde{G}\left(\frac{h+z}{k}, \omega\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\omega}\, e\left(mn\,\frac{h+z}{k}\right) \\ \qquad = \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\omega}\, e\left(\frac{\lambda n h}{k}\right)\cdot e\left((qk+\lambda)\frac{nz}{k}\right) \\ \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\omega}\left[1 - e(nz)\right]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k} e\left(n\,\frac{\lambda h}{k} + nz\,\frac{\lambda}{k}\right) \end{cases}$$

und das Entsprechende mit h' und $-z^{-1}$ statt h bzw. z.

Wir betrachten in der x-Ebene ein Viereck $\mathfrak{p}_N$ mit den Eckpunkten $\pm M$, $\pm Mz^{-1}$ mit $M = N+\frac{1}{2}$, wobei N eine so groß gewählte natürliche Zahl bedeutet, daß $\pm\omega$ im Inneren unseres Parallelogramms liegen; es soll in positivem Umlaufsinn

$$(3.4)\qquad I_N = \int_{(\mathfrak{p}_N)} \Phi(x,\omega)\,dx$$

mit

$$\Phi(x,\omega) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\omega} + \frac{1}{x-\omega}\right)\operatorname{ctg}\pi x\cdot\operatorname{ctg}\pi zx + \\ + \frac{1}{x-\omega}\left[e(x)-1\right]^{-1}\left[e(zx)-1\right]^{-1}\cdot\sum_{\lambda=1}^{k-1} e\left(x\,\overline{\lambda h/k} + zx\cdot\lambda/k\right)$$

gebildet werden[7]).

Sämtliche Singularitäten (Pole) von $\Phi(x,\omega)$ innerhalb und auf $\mathfrak{p}_N$ liegen in $\pm\omega$ und in den Punkten n, nz^{-1} $(n=0, \pm 1, \ldots, \pm N)$; unter diesen ist

[7]) Im Fall $k=1$ soll eine „leere" Summe $\sum_{\lambda=1}^{k-1}$ natürlich 0 bedeuten.

$x=0$ zweiter Ordnung, die übrigen besitzen die Ordnung 1. Man findet unschwer mittels $\operatorname{ctg}\pi x=\frac{1}{\pi}x^{-1}-\frac{\pi}{3}x+\cdots$ und $[e(x)-1]^{-1}=\frac{1}{2\pi i}x^{-1}-\frac{1}{2}+\cdots$ $(0<|x|<1)$

$$\operatorname*{Res}_{x=0}\Phi(x,\omega)=kz^{-1}(2\pi\omega)^{-2}; \tag{3.5}$$

es folgt noch unmittelbar

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=\pm\omega}\Phi(x,\omega)=-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}\pi\omega\cdot\operatorname{ctg}\pi z\omega+\\ \qquad+\delta_{\pm}\cdot[e(\omega)-1]^{-1}[e(z\omega)-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(\omega\,\overline{\lambda h/k}+z\omega\cdot\lambda/k)\end{cases} \tag{3.6}$$

mit $\delta_{+}=1$, $\delta_{-}=0$. Ferner ist für $n=1,2,\ldots$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=n}\Phi(x,\omega)=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n-\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n-\omega}[e(nz)-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(n\cdot\lambda h/k+nz\cdot\lambda/k),\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=-n}\Phi(x,\omega)=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\operatorname{ctg}(-n\pi z)-\\ \qquad-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+\omega}[1-e(nz)]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(-n\cdot\lambda h/k+nz(k-\lambda)/k)\\ \qquad=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+\omega}[e(nz)-1]^{-1}\sum_{\mu=1}^{k-1}e(n\cdot\mu h/k+nz\cdot\mu/k);\end{cases} \tag{3.8}$$

und ähnlich wegen $\overline{\lambda h' h/k}=\overline{-\lambda/k}=1-\lambda/k$ $(1\leqq\lambda\leqq k-1)$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=nz^{-1}}\Phi(x,\omega)=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n-z\omega}+\frac{1}{n+z\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z^{-1}+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n-z\omega}[e(nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(nz^{-1}\,\overline{\lambda h/k}+n\cdot\lambda/k)\\ \qquad=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n-z\omega}+\frac{1}{n+z\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z^{-1}+\\ \qquad+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n-z\omega}[e(-nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(n\cdot\lambda h'/k-nz^{-1}\cdot\lambda/k)\,^{8}),\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases}\operatorname*{Res}_{x=-nz^{-1}}\Phi(x,\omega)=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+z\omega}+\frac{1}{n-z\omega}\right)\operatorname{ctg}(-n\pi z^{-1})-\\ \qquad-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+z\omega}[e(-nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k-1}e(-n\cdot\lambda h'/k-nz^{-1}(k-\lambda)/k)\\ \qquad=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{n+z\omega}+\frac{1}{n-z\omega}\right)\operatorname{ctg}n\pi z^{-1}-\\ \qquad-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n+z\omega}[e(-nz^{-1})-1]^{-1}\sum_{\mu=1}^{k-1}e(n\cdot\mu h'/k-nz^{-1}\cdot\mu/k).\end{cases} \tag{3.10}$$

[8]) Wir benützen, daß mit λ auch $\lambda h'$ alle Reste $\not\equiv 0 \bmod k$ durchläuft.

Auf Grund von (3.5) bis (3.10) liefert der Residuensatz, falls zugleich $\operatorname{ctg}\pi x = -i\{1+2e(x)[1-e(x)]^{-1}\}$ berücksichtigt wird:

$$\frac{1}{2\pi i}J_N = \frac{kz^{-1}}{4\pi^2\omega^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\{[e(\omega)-1]^{-1}+[e(z\omega)-1]^{-1}\}+\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,z\omega)+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+z\omega}+\frac{1}{n-z\omega}-\frac{1}{n+\omega}-\frac{1}{n-\omega}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+\omega}+\frac{1}{n-\omega}\right)[1-e(nz)]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k}e(n\cdot\lambda h/k+nz\cdot\lambda/k)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+z\omega}+\frac{1}{n-z\omega}\right)[1-e(-nz^{-1})]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k}e(n\cdot\lambda h'/k-nz^{-1}\cdot\lambda/k),$$

so daß man wegen (3.3) und $\Psi(\omega) = -\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+\omega}\right)$[9] die Formel

$$(3.11)\quad \left\{\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}J_N = &-\frac{k}{2\pi i}\omega^{-1}(z\omega)^{-1}+\frac{\pi i}{2}+\pi i\{[e(\omega)-1]^{-1}+[e(z\omega)-1]^{-1}\}+\\ &+2\pi i\cdot\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,z\omega)+\frac{1}{2}[Y(\omega)-Y(z\omega)]-\\ &-\left[\tilde{Q}\left(\frac{h+z}{k},\omega\right)-\tilde{Q}\left(\frac{h'-z^{-1}}{k},z\omega\right)\right]\end{aligned}\right.$$

entnehmen kann.

Andererseits ist

$$J_N = \int_{(\mathfrak{p})}\left\{\frac{1}{4}\frac{M^2t}{\omega-M^2t^2}\operatorname{ctg}M\pi t\cdot\operatorname{ctg}M\pi zt+\right.$$

$$\left.+\frac{M}{Mt-\omega}[e(Mt)-1]^{-1}[e(Mzt)-1]^{-1}\sum_{\lambda=1}^{k}e\left(Mt\overline{\lambda h/k}+Mzt\cdot\lambda/k\right)\right\}dt,$$

wo $\mathfrak{p}$ das in positivem Sinn umgelaufene Parallelogramm mit den Eckpunkten ±1, $\pm z^{-1}$ bezeichnet. Bei festem $t\neq\pm1$, $\pm z^{-1}$ und für $N\to\infty$ strebt das zweite Glied des Integranden ersichtlich gegen 0, während $\operatorname{ctg}M\pi t\cdot\operatorname{ctg}M\pi zt$ (wie leichte Umformungen zeigen) $\to+1$ oder -1 je nachdem t auf den Seiten $(z^{-1},1)$, $(-z^{-1},-1)$ bzw. auf $(1,-z^{-1})$, $(-1,z^{-1})$ gelegen ist. Wir können also schreiben

$$(3.12)\quad \left\{\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}J_N &= \frac{1}{4}\left(\int_{1}^{-z^{-1}}\frac{dt}{t}-\int_{-z^{-1}}^{-1}\frac{dt}{t}+\int_{-1}^{z^{-1}}\frac{dt}{t}-\int_{z^{-1}}^{1}\frac{dt}{t}\right)\\ &= \frac{1}{2}[\log z^{-1}+\log(-z^{-1})] = -\log z+\frac{\pi i}{2}.\end{aligned}\right.$$

Vergleicht man (3.11) und (3.12), so ergibt sich unmittelbar (3.1), w.z.b.w.

[9] Hierin bezeichnet γ die Eulersche Konstante.

4. Wir gehen zu den *Anwendungen* des eben bewiesenen Satzes über.

I. Zunächst liefert (3.1) für $\omega \to 0$ wegen $\widetilde{Q}(\tau, 0) - 2g_1(\tau) = \frac{\pi i}{6}\tau - 2\operatorname{Log}\eta(\tau)$, $Y(0) = -2\gamma$ und

$$(4.1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\omega\to 0}\left\{\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, z\omega) + \frac{1}{2}\left[(e(\omega)-1)^{-1} + (e(z\omega)-1)^{-1}\right] + \frac{k}{4\pi^2}\omega^{-1}(z\omega)^{-1}\right\} \\ &\qquad = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12k}(z + z^{-1}) + \sum_{\lambda=1}^{k-1}\left(\overline{\lambda h/k} - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda/k - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

folgendes:

$$(4.2)\quad \operatorname{Log}\eta\left(\frac{h' - z^{-1}}{k}\right) - \operatorname{Log}\eta\left(\frac{h+z}{k}\right) = \frac{1}{2}\log z + \pi i \cdot s(h,k) + \frac{\pi i}{12k}(h'-h) - \frac{\pi i}{4},$$

wobei $s(h, k)$ die (Dedekindsche) Summe rechts in (4.1) bedeuten soll. Das ist — von Bezeichnungen abgesehen — die *Transformationsformel von* DEDEKIND [5]. Läßt man in (3.2) $\omega \to 0$ streben, so entspringt der wichtige Spezialfall

$$(4.3)\quad \eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \eta(z)\sqrt{\frac{z}{i}}.$$

II. Es sei

$$(4.4)\quad x\,y\,\mathfrak{S}_c^{a,b}(x/2\pi i, y/2\pi i) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m!\,n!}\,\tilde{s}_{m,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \qquad (|x|, |y| < 2\pi)$$

gesetzt; die Koeffizienten

$$(4.5)\quad \tilde{s}_{m,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} = \sum_{\lambda=0}^{c-1} B_m(\overline{\lambda a/c})\, B_n(\overline{\lambda b/c}) \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)^{10})$$

sind die sog. generalisierten *Dedekindschen Summen*.

(4.4) ergibt die Laurentsche Entwicklung:

$$(4.6)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_k^{h}(\omega, z\omega) &= z^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2\pi i\omega)^{\nu-2}}{\nu!}\sum_{\lambda=0}^{\nu}\binom{\nu}{\lambda} z^{\lambda}\cdot\tilde{s}_{\nu-\lambda,\lambda}\begin{pmatrix} h & 1 \\ k & \end{pmatrix} \\ &\qquad (z \neq 0;\ 0 < |\omega| < \min\{2\pi, 2\pi/|z|\}). \end{aligned} \right.$$

Beachtet man noch [vgl. (2.2)]

$$(4.7)\quad \widetilde{Q}(\tau, \omega) = 2\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{g}_{2r+1}(\tau)\,\omega^{2r} \qquad (\Im(\tau) > 0,\ |\omega| < 1),$$

$$(4.8)\quad Y(\omega) = \Psi(1+\omega) + \Psi(1-\omega) = -2\gamma - 2\sum_{r=1}^{\infty}\zeta(2r+1)\,\omega^{2r} \qquad (|\omega| < 1)$$

und

$$(4.9)\quad [e(\omega) - 1]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}(2\pi i\omega)^{\nu-1} \qquad (0 < |\omega| < 1),$$

---

[10]) Vgl. [9], (2.5). — Wir benutzen die übliche Definition der Bernoullischen Polynome und Zahlen: $z\,e^{uz}/(e^z - 1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(u)\,z^\nu/\nu!$ $(|z| < 2\pi)$, $B_\nu = B_\nu(0)$.

so folgen aus (3.1) durch Koeffizientenvergleichung:

$$(4.10)\quad \tilde{g}_1\left(\frac{h+z}{k}\right)-\tilde{g}_1\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}\right)=\frac{1}{2}\log z-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{12k}(z+z^{-1})+\pi i\,\tilde{s}_{11}\binom{h\,1}{k},$$

$$(4.11)\quad \begin{cases}\tilde{g}_{2r+1}\left(\frac{h+z}{k}\right)-\tilde{g}_{2r+1}\left(\frac{h'-z^{-1}}{k}\right)z^{2r}=\zeta(2r+1)(z^{2r}-1)+\\ \quad+\frac{(2\pi i)^{2r+1}}{(2r+2)!}\sum_{\lambda=0}^{2r+2}\binom{2r+2}{\lambda}z^{2r+1-\lambda}\,\tilde{s}_{\lambda,\,2r+2-\lambda}\binom{h\,1}{k}\qquad (r=1,2,\ldots),\end{cases}$$

$$(4.12)\quad \begin{cases}\left(r+\frac{1}{2}\right)B_{2r}\cdot(z^{2r}+z)+\\ \quad+\sum_{\lambda=0}^{2r+1}\binom{2r+1}{\lambda}z^{2r+1-\lambda}\,\tilde{s}_{\lambda,\,2r+1-\lambda}\binom{h\,1}{k}=0\qquad (r=1,2,\ldots)\end{cases}$$

falls man, der Reihe nach, die Faktoren von $\omega^0=1$, die von ω^{2r} bzw. von ω^{2r-1} sammelt; alles gilt unter den Prämissen des Satzes.

Nun ist (4.10) ersichtlich mit (4.2) äquivalent, während (4.11) (von Bezeichnungen abgesehen) die *Apostolschen Transformationsgesetze* ([1], Th. 2) darstellt[11]).

Was (4.12) betrifft, so steht hier links ein Polynom von z; dies impliziert aber das Verschwinden aller Koeffizienten, d.h. für $r=1,2,\ldots$

$$(4.13)\qquad \tilde{s}_{0,\,2r+1}\binom{h\,1}{k}=\tilde{s}_{2r+1,\,0}\binom{h\,1}{k}=0,$$

$$(4.14)\qquad \tilde{s}_{\lambda,\,2r+1-\lambda}\binom{h\,1}{k}=0\qquad (2\leq\lambda\leq 2r-1),$$

$$(4.15)\qquad \tilde{s}_{1,\,2r}\binom{h\,1}{k}=\tilde{s}_{2r,\,1}\binom{h\,1}{k}=-\frac{1}{2}B_{2r}.$$

Letzteres findet man bei APOSTOL [l. c., Th. 4, (4.13)] ein wenig anders geschrieben. Wir bemerken, daß (4.13) bis (4.15) zusammen mit der Formel

$$(4.16)\quad \begin{cases}\sum_{\lambda=1}^{c-1}B_m(\overline{\lambda\,a/c})\,B_n(\overline{\lambda\,b/c})=0\\ (c>0;\,(a,c)=(b,c)=1;\,m,n=0,1,\ldots;\,m\not\equiv n\pmod 2)\end{cases}$$

äquivalent sind, welche sich mittels der Fourier-Entwicklung von $B_\nu(\overline{u})$ bzw. durch die Eigenschaften der Bernoullischen Polynome auch direkt verifizieren läßt[12]).

5. Setzen wir in unsern Formeln $(h+z)/k=\tau$, $(h'-z^{-1})/k=\tau^*$, $(hh'+1)/k=k'$; dann gilt

$$(5.1)\qquad \tau^*=\frac{h'\tau-k'}{k\tau-h},\qquad \begin{vmatrix}h'-k'\\ k-h\end{vmatrix}=1,$$

d.h. in (5.1) liegt eine *unimodulare* lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten, eine sog. *Modulsubstitution* vor. Bekanntlich bilden die

[11]) Es sei bemerkt, daß ein Glied (mit dem ζ-Faktor) a. a. O. zu fehlen scheint.
[12]) Vgl. noch [2], (2.2) und [9], Th. 2, (6.5).

Substitutionen der Form (5.1) eine Gruppe, die *Modulgruppe*; wenden wir auf τ^* eine andere solche Transformation an:

$$\tau^{**} = \frac{h_1'\tau^* - k_1'}{k_1\tau^* - h_1}, \qquad \begin{vmatrix} h_1' & -k_1' \\ k_1 & -h_1 \end{vmatrix} = 1, \tag{5.2}$$

so ergibt sich

$$\tau^{**} = \frac{H'\tau - K'}{K\tau - H} \tag{5.3}$$

mit $H' = h'h_1' - kk_1'$, $K' = h_1'k' - hk_1'$, $K = h'k_1 - h_1k$, $H = k'k_1 - hh_1$, oder

$$\begin{pmatrix} H' & -K' \\ K & -H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1' & -k_1' \\ k_1 & -h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & -k' \\ k & -h \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

eine Matrix, die in der Tat wieder die Determinante 1 hat.

Mit den obigen Bezeichnungen gestaltet sich (3.1)[13]:

$$\begin{cases} \widetilde{Q}(\tau,\omega) - \widetilde{Q}(\tau^*, (k\tau - h)\omega) = \frac{1}{2}[Y(\omega) - Y((k\tau - h)\omega)] + \\ \quad + \log(k\tau - h) + 2\pi i\, \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, (k\tau - h)\omega) + \\ \quad + \pi i\{[e(\omega) - 1]^{-1} + [e((k\tau - h)\omega) - 1]^{-1}\} + \frac{k\omega^{-2}}{2\pi i}(k\tau - h)^{-1}; \end{cases} \tag{5.5}$$

schreibt man hierin τ^*, $(k\tau - h)\omega$, h_1, k_1, h_1', k_1' der Reihe nach anstatt τ, ω, h, k, h', k', so entsteht wegen $(k_1\tau^* - h_1)(k\tau - h) = K\tau - H$ die Formel

$$\begin{cases} \widetilde{Q}(\tau^*, (k\tau - h)\omega) - \widetilde{Q}(\tau^{**}, (K\tau - H)\omega) \\ \quad = \frac{1}{2}[Y((k\tau - h)\omega) - Y((K\tau - H)\omega)] + \\ \quad + \log(k_1\tau^* - h_1) + 2\pi i\, \mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau - h)\omega, (K\tau - H)\omega) + \\ \quad + \pi i\{[e((k\tau - h)\omega) - 1]^{-1} + [e((K\tau - H)\omega) - 1]^{-1}\} - \\ \quad - \frac{k_1\omega^{-2}}{2\pi i}(k\tau - h)^{-1}(K\tau - H)^{-1}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Durch Addition folgt aus (5.5), (5.6)

$$\begin{cases} \widetilde{Q}(\tau,\omega) - \widetilde{Q}(\tau^{**}, (K\tau - H)\omega) \\ = \frac{1}{2}[Y(\omega) - Y((K\tau - H)\omega)] + \log(K\tau - H) + \\ \quad + 2\pi i[\mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega, (k\tau - h)\omega) + \mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau - h)\omega, (K\tau - H)\omega)] + \\ \quad + \pi i\{[e(\omega) - 1]^{-1} + 2[e((k\tau - h)\omega) - 1]^{-1} + [e((K\tau - H)\omega) - 1]^{-1}\} - \\ \quad - \frac{\omega^{-2}}{2\pi i}(k\tau - h)^{-1}[k + k_1(K\tau - H)^{-1}], \end{cases} \tag{5.7}$$

[13]) Die Gruppeneigenschaft der Modulsubstitutionen ist z. B. auch in [10] und [4] benutzt.

während (5.5) für die „Produktsubstitution“ (5.3)

$$(5.8)\quad \begin{cases} \tilde{Q}(\tau,\omega)-\tilde{Q}(\tau^{**},(K\tau-H)\omega)=\frac{1}{2}[Y(\omega)-Y((K\tau-H)\omega)]+ \\ \quad +\log(K\tau-H)+2\pi i\,\mathfrak{S}_K^{H,1}(\omega,(K\tau-H)\omega)+ \\ \quad +\pi i\{[e(\omega)-1]^{-1}+[e((K\tau-H)\omega)-1]^{-1}\}-\frac{\omega^{-2}}{2\pi i}K(K\tau-H)^{-1} \end{cases}$$

liefert. Vergleicht man die rechte Seite von (5.7) bzw. (5.8), so geht nach einigen Vereinfachungen

$$(5.9)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,(k\tau-h)\omega)+\mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)- \\ \quad -\mathfrak{S}_K^{H,1}(\omega,(K\tau-H)\omega)=[1-e((k\tau-h)\omega)]^{-1} \end{cases}$$

hervor; eine Relation, wobei leicht nachweisbar

$$0<\arg(k\tau-h)<\arg(K\tau-H)<\pi,$$

ferner ω, $(k\tau-h)\omega$, $(K\tau-H)\omega$ nicht ganz und nebst k auch k_1, K positiv sein müssen.

Aus Symmetriegründen ist es zweckmäßig, (5.9) auch mit etwas veränderten Bezeichnungen aufzuschreiben. — Wir setzen $k=a$, $k_1=b$, $K=c$ und nehmen $(a,b)=(k,k_1)=1$ an; hieraus fließen zugleich $(a,c)=(k,h'k_1)=1$ und $(b,c)=(k_1,hk)=1$. Sind a', c', a'' so gewählt, daß $aa'\equiv 1 \pmod b$, $cc'\equiv 1 \pmod a$, $aa''\equiv 1 \pmod c$, so folgen aus den Kongruenzen

$$\begin{aligned} ch=(h'k_1-h_1k)h\equiv hh'k_1\equiv -b \pmod k,\\ ah_1\equiv h_1k-h'k_1=-c \pmod{k_1},\\ aH=kk'k_1-hh_1k=hK+k_1\equiv b \pmod K \end{aligned}$$

die weiteren

$$(5.10)\qquad h\equiv -bc' \pmod a,\quad h_1\equiv -ca' \pmod b,\quad H=ba'' \pmod c.$$

Nun bleibt $\mathfrak{S}_c^{a,b}(x,y)$ ersichtlich unverändert, wenn man anstatt a, b mit ihnen mod c kongruenten Zahlen, oder qa bzw. qb mit $(q,c)=1$ schreibt; ferner gilt $\mathfrak{S}_c^{-a,b}(x,y)=-\mathfrak{S}_c^{a,b}(-x,y)+[1-e(y)]^{-1}$. Daher entspringen mit Rücksicht auf (5.10)

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_k^{h,1}(\omega,(k\tau-h)\omega)=\mathfrak{S}_a^{-b,c}(\omega,(k\tau-h)\omega)=-\mathfrak{S}_a^{b,c}(-\omega,(k\tau-h)\omega)+\\ +[1-e((k\tau-h)\omega)]^{-1},\\ \mathfrak{S}_{k_1}^{h_1,1}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)=\mathfrak{S}_b^{c,-a}((k\tau-h)\omega,(K\tau-H)\omega)\\ =-\mathfrak{S}_b^{c,a}((k\tau-h)\omega,-(K\tau-H)\omega)+[1-e((k\tau-h)\omega)]^{-1},\\ \mathfrak{S}_K^{H,1}(\omega,(K\tau-H)\omega)=\mathfrak{S}_c^{a,b}((K\tau-H)\omega,\omega). \end{aligned}$$

Führt man noch $\omega=cy$, $(K\tau-H)\omega=cx$ und mithin

$$(k\tau-h)\omega=kx+(kH-hK)y=ax+by$$

ein, so geht (5.9) in den bemerkenswerten *Dreigliedersatz*

$$(5.11)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_b^{c,a}(ax+by,-cx)+\mathfrak{S}_c^{a,b}(cx,cy)+\mathfrak{S}_a^{b,c}(-cy,ax+by) \\ \qquad =[1-e(ax+by)]^{-1} \end{cases}$$

mit den Bedingungen $\arg cy<\arg(ax+by)<\arg cx$, $\arg cx-\arg cy<\pi$; $cx, cy, ax+by\neq 0, \pm 1, \ldots$ über.

6. (5.11) ist ein Ergebnis meiner Arbeit [9] (Th. 1), wo man (nebst einem independenten Beweis) die Prämissen $0\leqq\Re(x)<1$, $-1<\Re(y)\leqq 0$ und auch mehrere Anwendungen über Dedekindsche Summen findet. — An dieser Stelle wollen wir zeigen, daß aus (5.9) zugleich eine kürzlich von CARLITZ [4][14]) veröffentlichte allgemeinere Relation folgt, nämlich

$$(6.1)\quad \begin{cases} F_\nu(h,k;\tau)+(k\tau-h)^{\nu-2}F_\nu(h_1,k_1;\tau^*)-F_\nu(H,K;\tau)=-\nu B_{\nu-1}\cdot(k\tau-h)^{\nu-2} \\ (k,k_1,K>0;\ 0<\arg(k\tau-h)<\arg(K\tau-H)<\pi;\ \nu=1,2,\ldots) \end{cases}$$

mit

$$F_\nu(h,k;\tau)=\sum_{\lambda=0}^{\nu}\binom{\nu}{\lambda}(k\tau-h)^{\lambda-1}\,\mathfrak{s}_{\nu-\lambda,\lambda}\left(\begin{matrix}h & 1\\ k\end{matrix}\right).$$

In der Tat, wenn man in (5.9) nach Multiplizieren mit $\omega^2(k\tau-h)^2$, die Variable ω mit $\omega/2\pi i$ ersetzt und sich auf die Potenzreihenentwicklung [vgl. (4.6)]

$$\omega^2\,\mathfrak{S}_k^{h,1}\left(\frac{\omega}{2\pi i},(k\tau-h)\frac{\omega}{2\pi i}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^\nu}{\nu!}F_\nu(h,k;\tau)$$

$$\left(k\tau\neq h;\ |\omega|<\min\{1,|k\tau-h|^{-1}\}\right)$$

stützt, so entspringt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^\nu}{\nu!}\left[(k\tau-h)^2F_\nu(h,k;\tau)+(k\tau-h)^\nu F_\nu(h_1,k_1;\tau^*)-(k\tau-h)^2F_\nu(H,K;\tau)\right]$$
$$=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^{\nu+1}}{\nu!}B_\nu\cdot(k\tau-h)^{\nu+1},$$

woher die betreffende Formel unmittelbar folgt.

(6.1) enthält auch Erweiterungen gewisser *Carlitzschen Reziprozitätssätze* ([2], Th. 1, 2) und somit einer spezielleren, von APOSTOL herrührenden Relation ([1], Th. 1), welche sich auf die generalisierten Dedekindschen Summen $\mathfrak{s}_{m,n}\left(\begin{matrix}h & 1\\ k\end{matrix}\right)$ beziehen und aus (6.1) für $\nu\geqq 2$ durch Koeffizientenvergleichung inbetreff τ bzw. $z=k\tau-h$ gewonnen werden können. Insbesondere sei der einfachste Fall $\nu=2$ erwähnt; dann bekommt man nach einfacher Rechnung

$$(6.2)\quad \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{matrix}h & 1\\ k\end{matrix}\right)+\mathfrak{s}_{11}\left(\begin{matrix}h_1 & 1\\ k_1\end{matrix}\right)-\mathfrak{s}_{11}\left(\begin{matrix}H & 1\\ K\end{matrix}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\left(\frac{K}{kk_1}+\frac{k}{k_1K}+\frac{k_1}{Kk}\right),$$

[14]) Es sei auf mehrere hierin befindliche Druckfehler hingewiesen: z.B. in der für $m=4, 6, 8, \ldots$ geltenden Formeln (1.10) und (1.11) ist n durch m, $2\pi i$ durch $(2\pi i)^{m-1}$ zu ersetzen, bzw. statt h links H zu schreiben und rechts $(-i)^m$ zu streichen.

eine Formel, die dem Wesen nach mit einem eleganten Rademacherschen Resultat (vgl. [11], (30)) bzw. mit meiner *Symmetrierelation* ([9], (5.3))

$$\begin{cases} \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ a & \end{smallmatrix}\right) + \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{smallmatrix} c & a \\ b & \end{smallmatrix}\right) + \mathfrak{s}_{11}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) \\ (a, b, c > 0;\ (a, b) = (b, c) = (c, a) = 1) \end{cases} \tag{6.3}$$

äquivalent ist. (6.3) liefert für $a = 1$, $b = h$, $c = k$ (vgl. § 4)

$$12\, s(h, k) + 12\, s(k, h) = -3 + \frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk}, \tag{6.4}$$

d.h. das *Reziprozitätsgesetz von* DEDEKIND ([5], S. 442).

7. Die Transformationsformel für $\eta(\tau)$ und einige analoge, kompliziertere Relationen zeigten sich als nützlich bei Singularitätsuntersuchungen auf dem Einheitskreis, welche bekanntlich das asymptotische Verhalten der zugehörigen Partitionsfunktionen liefern[15]). — Im zweiten Teil hoffe ich auf gewisse mit $Q(x, \omega)$ verknüpfte, naheliegende Asymptotikprobleme zurückzukommen.

Literatur

[1] APOSTOL, T. M.: Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. Duke Math. J. **17**, 147—157 (1950). — [2] CARLITZ, L.: Some theorems on generalized Dedekind sums. Pac. J. Math. **3**, 513—522 (1953). — [3] CARLITZ, L.: Dedekind sums and Lambert series. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 580—584 (1954). — [4] CARLITZ, L.: A further note on Dedekind sums. Duke Math. J. **23**, 219—223 (1956). — [5] DEDEKIND, R.: Erläuterungen zu den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Funktionen. Ges. math. Werke **1**, Braunschweig 1930, 159—173. — [6] HARDY, G. H., and S. RAMANUJAN: Asymptotic formulae in combinatory analysis. Proc. London Math. Soc. (2) **17**, 75—115 (1917). — [7] KNOPP, K.: Über Lambertsche Reihen. J. reine angew. Math. **142**, 283—315 (1913). — [8] KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl. Berlin-Heidelberg 1947. — [9] MIKOLÁS, M.: On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws. Pac. J. Math. (im Erscheinen). — [10] RADEMACHER, H.: Zur Theorie der Modulfunktionen. J. reine angew. Math. **167**, 312—336 (1931). — [11] RADEMACHER, H.: Generalization of the reciprocity formula for Dedekind sums. Duke Math. J. **21**, 391—397 (1954). — [12] RADEMACHER, H.: On the transformation of $\log \eta(\tau)$. J. Indian Math. Soc. (2) **19**, 25—30 (1955). — [13] RADEMACHER, H., and A. WHITEMAN: Theorems on Dedekind sums. Amer. J. Math. **63**, 377—407 (1941). — [14] SCHOENFELD, L.: A transformation formula in the theory of partitions. Duke Math. J. **11**, 873—887 (1944). — [15] SIEGEL, C. L.: A simple proof of $\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \eta(\tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}}$. Mathematika **1**, 4 (1954).

[15]) Vgl. z. B. [6].

Budapest, Mathematisches Institut der Eötvös Loránd-Universität

(Eingegangen am 9. Februar 1957)

Analytische und konstruktive Differentialgeometrie

Von Dr. **Erwin Kruppa**, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 75 Textabbildungen. VII, 191 Seiten Gr.-8°. 1957. Ganzleinen DM 39.—

Inhaltsübersicht: **Grundbegriffe der Vektorrechnung.** — **Analytische Differentialgeometrie.** Raumkurven. Längen, Winkel und Flächeninhalte auf krummen Flächen; flächentreue und konforme Abbildungen. Krümmung der Flächen. Biegung von Flächen. Windschiefe Strahlflächen und Ergänzungen zur Kurventheorie. Strahlkongruenzen. Strahlkomplexe. — **Konstruktive Differentialgeometrie.** Konstruktive Ergänzungen zur Theorie der Kurven und Torsen, zur Flächentheorie und zur Theorie der windschiefen Strahlflächen. Konstruktive Differentialgeometrie besonderer Flächen und Kurven. Das konforme und das projektive Bild der nichteuklidischen Geometrien auf den Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Kinematische Differentialgeometrie. — Namen- und Sachverzeichnis.

Integraltafel

Von Dr. **Wolfgang Gröbner**, o. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **Nikolaus Hofreiter**, o. Professor an der Universität Wien.

Soeben erschien:

Erster Teil: **Unbestimmte Integrale**

Zweite, verbesserte Auflage. VIII, 166 Seiten 4°. 1957.

Steif geheftet DM 22.70

Aus den Besprechungen zur ersten Auflage: „Die Verfasser haben mit der vorliegenden Integraltafel ein sehr nützliches Instrument der angewandten Mathematik geschaffen. Sie haben bei der unter Berücksichtigung praktischer Bedürfnisse zusammengestellten Sammlung die ihnen erreichbaren bereits bestehenden Integraltafeln sorgfältig geprüft und berücksichtigt, so daß mit der nun veröffentlichten Tafel unbestimmter Integrale ein hoher Grad der Vollständigkeit erreicht sein dürfte. ... Die Tafel gliedert sich in drei Hauptabschnitte: 1. Rationale Integranden. 2. Algebraisch irrationale Integranden. 3. Transzendente Integranden. ... Es steckt in der Zusammenstellung dieser Integraltafel ein hohes Maß an mühevoller Geduldsarbeit, begleitet von umfangreichen Kontrollrechnungen. Man muß den Verfassern und ihren Mitarbeitern für diese entsagungsvolle Arbeit sehr dankbar sein. Möge das Werk in der rechnenden Praxis volle Bewährung und rege Inanspruchnahme finden."

Archiv der Mathematik

Früher erschien:

Zweiter Teil: **Bestimmte Integrale**

VI, 204 Seiten 4°. 1950. Steif geheftet DM 24.—

„Der große Umfang des bearbeiteten Materials berücksichtigt weitgehend die praktischen Bedürfnisse und begründet damit den Wert der vorliegenden Tafel. Durch die Einführung geeigneter Parameter konnten gleichartige Integrale in übersichtlicher Weise zu Typen zusammengefaßt werden, was die Anwendung der Tafel sehr erleichtert ..."

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. Collatz** und **F. Lösch.**

Im Juli 1957 erschien:

3. Heft: **Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik**

Von Dr. **Karl-Richard Dorfner,** München. Mit 44 Abbildungen. VII, 150 Seiten Gr.-8°. 1957. Steif geheftet DM 26.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. **I. Physikalische und mathematische Grundlagen.** Grundgleichungen. Linearisierung. Analysis unstetiger Funktionen. — **II. Allgemeine Strömungsfelder.** Lösungsprinzip und Darstellungsformeln. Dickenproblem bei gegebener Geometrie und Auftriebsproblem bei gegebener Druckverteilung des Tragflügels. Auftriebsproblem bei gegebener Geometrie und Dickenproblem bei gegebener Druckverteilung des Tragflügels. — **III. Strömungsfelder mit konischer Symmetrie.** Grundlegende Beziehungen. Dreieckstragflügel mit konstantem Anstellwinkel. Dreieckstragflügel mit nichtkonstantem Anstellwinkel. Überlagerung konischer Strömungsfelder. — **IV. Homogene Strömung.** Verallgemeinerung der Formeln für konische Strömungsfelder. Die Behandlung homogener Strömungsfelder mit Unterschallkanten nach dem Singularitätenverfahren. Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

Im Mai 1957 erschien:

4. Heft: **Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen**

Von Dr. **W. Franz,** apl. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster i. Westf. Mit 29 Abbildungen. IV, 123 Seiten Gr.-8°. 1957. Steif geheftet DM 21.60

Inhaltsübersicht: **I. Allgemeine Grundlagen.** Maxwellsche Gleichungen — Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. Schwingungsgleichungen, Greensche Dyaden. Elektrischer und magnetischer Dipol. Greensche Dyaden und Greensche Funktion des unendlichen homogenen Raumes. Randwertaufgabe der Beugungstheorie. Stückweise homogenes Material, Grenzbedingungen. Kantenbedingung. Zylinderprobleme. Debyesche Potentiale. Integralgleichungen der Beugungstheorie. — **II. Beugung an Objekten ohne Kanten.** Beugung am Kreiszylinder. Konvergenz der Zylinderfunktionsreihen. Transformation der Reihen nach Watson. Diskussion der Residuenwellen. Diskussion der geometrischen Welle. Watson-Transformation für transparentes Material. Greensche Dyade der Kugel. Verhalten der Legendreschen Kugelfunktionen bei komplexem Index. Watsonsche Transformation der Greenschen Dyade der Kugel. Asymptotische Formeln für die Beugung an idealleitenden Kugeln. Integralgleichung für die Beugung am schwachgekrümmten Objekt. — **III. Beugung an Objekten mit Kanten.** Beugung am Keil nach Sommerfeld. Beugung an der blanken Halbebene nach Sommerfeld. Beugung an der schwarzen Kante. Kirchhoffsche Beugungstheorie. Modifikationen der Kirchhoffschen Theorie. Babinetsches Prinzip. Integralgleichung für die Beugung an der idealleitenden Scheibe. Beugung am schmalen Spalt. Kirchhoffsche Formeln für den ebenen Schirm. Beugung am ebenen Schirm nach der Braunbekschen Methode. Beugung an der idealleitenden Kreisscheibe nach der Methode von Braunbek. — Literatur. — Namen- und Sachverzeichnis.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt der Firma H. R. Engelmann (J. Cramer), Weinheim/Bergstraße, bei

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG. Würzburg
Printed in Germany